

COMBINACIÓN DE METODOLOGÍAS DE PREDICCIÓN PARA EL SECTOR DE LAS TELECOMUNICACIONES



osiptel
EL REGULADOR DE LAS TELECOMUNICACIONES

PRESIDENTE DEL CONSEJO DIRECTIVO

Rafael Munte Schwarz

AUTOR

Manuel Gavilano Aspíllaga
Gerencia de Políticas Regulatorias y Competencia

COLABORACIÓN

Rosa Castillo Mezarina
Nikolai Tovar Soto

EDICIÓN GENERAL

Lenka Zajec Yelusic

COORDINACIÓN

Richard Abecasis Rengifo

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN

Grafica Pittman E.I.R.L.

Esta publicación no puede ser reproducida total o parcialmente sin la autorización previa y por escrito del OSIPTEL.

© 2019 OSIPTEL. Derechos Reservados

OSIPTEL Organismo Supervisor de la Inversión Privada en Telecomunicaciones

Calle de la Prosa N°136 – San Borja
<http://www.osiptel.gob.pe>

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú-DL N°

COMBINACIÓN DE METODOLOGÍAS DE PREDICCIÓN PARA EL SECTOR DE LAS TELECOMUNICACIONES

Manuel Gavilano Aspíllaga

Gerencia de Políticas Regulatorias y Competencia
Subgerencia de Evaluación y Políticas de Competencia | OSIPTEL

Resumen

Este documento busca ser una referencia para el OSIPTEL cuando se requiera realizar predicciones sobre valores futuros en los indicadores relevantes del sector de las telecomunicaciones. Para ello se muestran las metodologías más comunes como: *Modelos de Box-Jenkins*, *Modelos de Suavizamiento Exponencial*, *Modelos de Regresiones Polinomiales* y *Modelos de Crecimiento Promedio*.

Adicionalmente, como en muchas ocasiones suele suceder, distintos organismos predicen diferentes valores para un mismo indicador (incluso, considerando los mismos datos históricos). Esto sucede simplemente porque escogieron distintas metodologías de predicción. Pero, *¿cuál es la mejor predicción? ¿Existe una metodología que sea superior a otras?* En términos generales, la respuesta es NO. Cada metodología trata de manera diferente y, por ende, recoge diferente información de los datos históricos para realizar predicciones.

En ese sentido, lo novedoso de este documento es demostrar (tal como lo señalan los estudios recientes) que las predicciones más idóneas provienen de una combinación de metodologías más que del uso de una única metodología. Para ello se recurre al Test de Diebold y Mariano, a fin de corroborar si la combinación de metodologías arrojaría predicciones más eficientes que una única metodología.

Como aplicación, se realiza predicciones sobre el indicador de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020. De acuerdo con los resultados, la mejor metodología (individual) para este indicador es la de Box-Jenkins y, por tanto, es la que se escogería para realizar predicciones. Sin embargo, la combinación de metodologías (Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales) es mucho más idónea porque se ajusta más a los datos. Este documento muestra de manera detallada estos resultados.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN	6
2. ESTADO ACTUAL DEL MERCADO DE TELEFONÍA MÓVIL	8
2.1. Número de líneas, participación de mercado y tasa de penetración	9
2.2. Concentración del mercado	10
2.3. Número de teléfonos móviles efectivamente portados	11
3. TRATAMIENTO PREVIO DE LA SERIE	12
3.1. Estacionalidad	12
3.2. Estacionariedad	16
4. METODOLOGÍAS DE PREDICCIONES	18
4.1. METODOLOGÍA DE BOX JENKINS	19
4.1.1. Proceso Autorregresivo: AR (p)	19
4.1.2. Proceso de Medias Móviles: MA (q)	20
4.1.3. Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles ARIMA (p,d,q)	20
4.1.4. Modelo Autorregresivo Estacional Integrado de Medias Móviles	21
4.2. METODOLOGÍA SOBRE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL	22
4.2.1. Suavizamiento Exponencial Simple	22
4.2.2. Suavizamiento Exponencial Doble o versión de Holt	22
4.2.3. Versión de Holt-Winters Multiplicativo	23
4.2.4. Versión de Holt-Winters Aditivo	23
4.2.5. Versión de Holt-Winters No-Estacional	24
4.2.6. Versión de Suavizamiento Exponencial Cuadrático o versión de Brow	24
4.3. METODOLOGÍA SOBRE REGRESIONES POLINOMIALES	25
4.4. MÉTODOLÓGÍA SOBRE TASA DE CRECIMIENTO PROMEDIO	26

5. TEST DE DIEBOLD Y MARIANO	27
5.1. Para predicciones empleando combinación de dos metodologías	29
5.2. Para predicciones empleando combinación de tres metodologías	30
6. APLICACIÓN Y RESULTADOS SOBRE PREDICCIONES	31
6.1. Predicciones a partir de distintas metodologías de manera individual	31
6.1.1. Predicción bajo Metodología de Suavizamiento Exponencial	32
6.1.2. Predicción bajo Metodología de Box-Jenkins	33
6.1.3. Predicción bajo Metodología de Regresiones Polinomiales	35
6.2. Comparación de predicciones realizadas por distintas metodologías	36
6.3. Aplicación del Test de Diebold y Mariano	39
7. COMBINACIÓN DE METODOLOGÍAS DE PREDICCIÓN	41
8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	43
BIBLIOGRAFÍA	46
ANEXOS	49

1 INTRODUCCIÓN

El OSIPTEL, entre sus labores, tiene la responsabilidad de promover y proteger la dinámica competitiva en los distintos mercados de servicios públicos de telecomunicaciones. Para cumplir con dicho objetivo, evalúa constantemente formas de diseñar e implementar políticas que incrementen la intensidad competitiva con el fin último de mejorar los niveles de bienestar en los usuarios.

De esta forma, el OSIPTEL –en muchas ocasiones– requiere anticipar o predecir los posibles escenarios que podrían ocurrir en los distintos servicios, a fin de estimular o intensificar la dinámica competitiva, sobre todo en aquellos servicios que están sujetos a cambios constantes (por ejemplo, el mercado de telefonía móvil).

En ese sentido, con el objetivo de identificar las metodologías más idóneas para predecir valores futuros sobre indicadores correspondientes al sector, se desarrolla aquí un breve marco teórico sobre las principales metodologías, así como su aplicación sobre el indicador de líneas móviles en servicio.

La clasificación de las metodologías de predicción suele realizarse considerando la cantidad de variables que se pretende predecir. En el caso del sector de las telecomunicaciones, los indicadores utilizados corresponden a series univariadas¹ (por ej. *tráfico*, *líneas en servicio*, *inversiones*, *ARPU*, *tarifa implícita*, *número de portaciones*). Por tanto, se utilizan metodologías como *Modelos de Box-Jenkins* (o procesos ARIMA), *Modelos de Suavizamiento Exponencial*, *Modelos de Regresiones Polinomiales* (o Tendencia Determinística) y *Modelos de Crecimiento Compuesto*².

¹ Solo en el caso de predecir un modelo que combine series univariadas podría emplearse modelos de predicción multivariado.

² En el caso de series multivariadas se utilizan los Modelos de Vectores Autorregresivos (o modelos VAR) y los modelos de Redes Neuronales Artificiales.

Por otro lado, en muchas ocasiones suele suceder que una institución estime una predicción diferente a la predicción estimada por otra institución, a pesar de tratarse de la misma variable y haberse utilizado los mismos datos históricos (incluso, para predicciones de muy corto plazo). Esto es posible porque probablemente emplearon diferentes metodologías de predicción³.

En ese sentido, es natural que surjan las siguientes preguntas: *¿Cuál es la mejor predicción para este indicador?*; *¿Qué método de predicción es más efectivo?*; o, en última instancia; *¿Con qué predicción nos quedamos al final?* Sobre estas preguntas es preciso señalar que cada metodología trata la información de una manera diferente y, por tanto, extrae distinta información considerada –en ambos casos– como información valiosa. Luego, a pesar de que las distintas predicciones arrojen información valiosa, los investigadores comúnmente optan por solo una de las predicciones (sin sustento alguno o con algún criterio de selección). Sin embargo, es muy probable que se esté dejando a un lado información valiosa o, tal vez, la mejor predicción.

Ante esto existe un test estadístico –de reciente uso– que permite comparar entre dos o más metodologías y de esta manera conocer cuál de las metodologías empleadas es la que más se ajusta a los valores que se están analizando. Incluso, la bondad de este test va mucho más allá, pues también permite –y de ser necesario recomienda– realizar una nueva regresión que combine algunas (o todas las) metodologías, asignándole una ponderación a cada metodología. De esta forma, la nueva predicción consideraría mucha más información, que de por sí una única metodología no la hubiera considerado. Este potente test fue propuesto por Diebold y Mariano (1995).

En ese sentido, el desarrollo del documento consta de las siguientes secciones:

- Una descripción rápida del mercado móvil peruano. Esto con el objetivo de observar su evolución y poner en contexto el indicador sobre el que se van a emplear las metodologías de predicción⁴. Así, se mencionan variables como número de líneas móviles, penetración del servicio y líneas portadas (Sección 2).
- Una introducción sobre el cuerpo teórico de las principales metodologías de predicción mencionadas y el tratamiento previo que le debe realizar a la serie antes de emplear alguna de las metodologías (Sección 3 y 4).
- Un desarrollo teórico sobre la intuición que existe detrás del Test de Diebold y Mariano, a fin de ser utilizado para determinar la predicción más idónea (modelo individual más eficiente versus combinación de metodologías). (Sección 5).

³ Por ejemplo, en el caso peruano es muy frecuente que el BCRP estime una proyección del PBI para el cierre del año distinta al nivel proyectado por el INEI o por el MEF.

⁴ Es preciso señalar que la selección del mercado móvil para el estudio se debe al dinamismo que ha presentado. Sin embargo, la predicción podría utilizarse perfectamente para cualquier mercado del sector de telecomunicaciones.

- Se realizan predicciones sobre el número de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020, sobre la base de las metodologías de Box Jenkins, Suavizamiento Exponencial, Regresiones Polinomiales y Tasas de crecimiento promedio. Esto a fin de conocer cuál de las metodologías individuales (a través de estadísticos de decisión) se ajustaría mejor al indicador mencionado.

Asimismo, se aplica el Test de Diebold y Mariano a fin de constatar si una combinación de las predicciones obtenidas es más eficiente que las predicciones realizadas cada una por separado, para la serie de líneas móviles en servicio. (Sección 6).

- Demostración empírica de que la predicción a través de la combinación de metodologías es más idónea que cualquier predicción realizada bajo una metodología individual. Asimismo, se muestra cómo se asignan los parámetros óptimos a cada metodología dentro de la combinación. (Sección 7).

2

ESTADO ACTUAL DEL MERCADO DE TELEFONÍA MÓVIL

En el sector de telecomunicaciones peruano, la telefonía móvil es uno de los servicios más dinámicos y de mayor crecimiento. A marzo de 2018, este mercado contó con cuatro empresas operadoras con red propia (Telefónica del Perú, América Móvil, Entel Perú y Viettel) y un operador móvil virtual (Inkacel⁵).

A continuación, se muestran las principales estadísticas que reflejan la evolución y dinamismo en el servicio móvil.

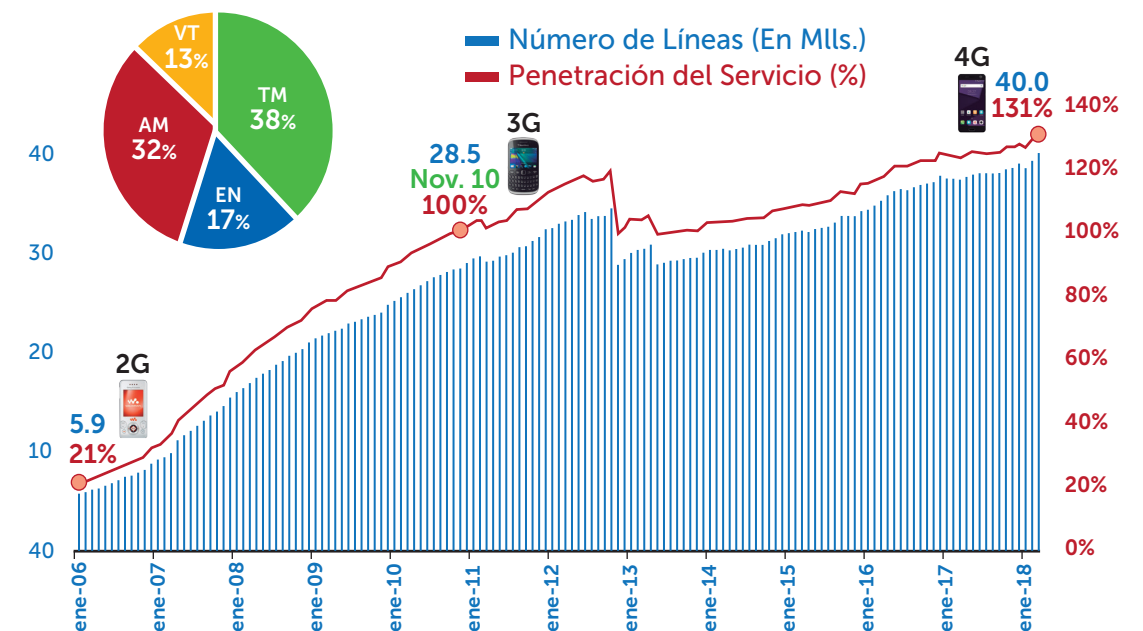
⁵ Inkacel fue la empresa que adquirió a Virgin Mobile en agosto de 2017.

2.1 Número de líneas, participación de mercado y tasa de penetración

El número de líneas móviles en servicio mantiene una tendencia al alza. Así, a marzo de 2018 se registraron alrededor de 40 millones de líneas en servicio. El crecimiento sostenido de las líneas en servicio ha generado que, desde fines del 2010, en el Perú se cuente con más líneas móviles que habitantes⁶.

Medida como el número de líneas por cada 100 habitantes, la tasa de penetración del servicio móvil continuó en ascenso. Si bien para enero de 2005 solo 15 de cada 100 habitantes contaban con una línea móvil, para noviembre de 2010 ya existía una línea móvil por cada habitante (penetración igual a 100%). Finalmente, a marzo de 2018, la tasa de penetración alcanzó las 131 líneas en servicio por cada 100 habitantes.

Figura 1:
Evolución del número de líneas móviles y penetración del servicio.
(Ene. 2006 - Mar. 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

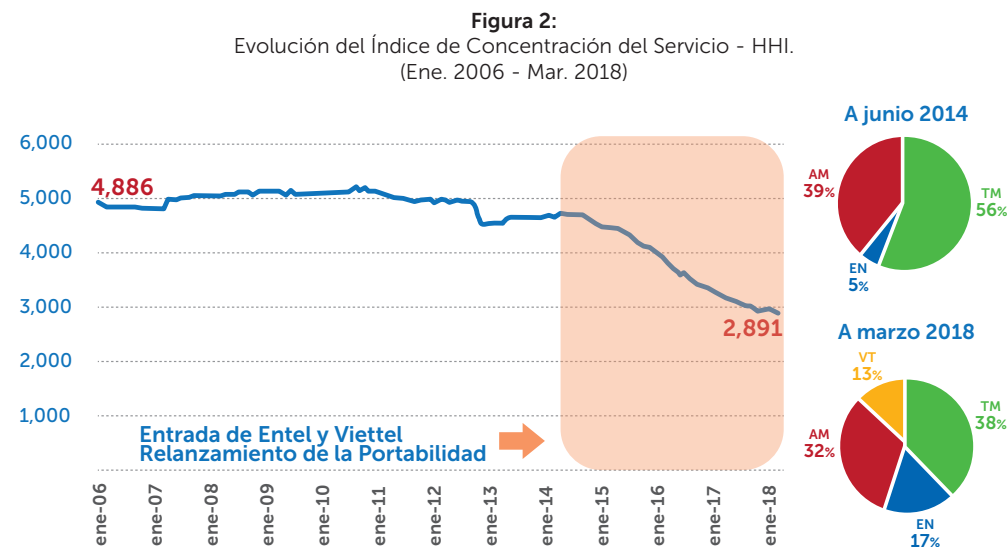
⁶ De acuerdo con el Instituto Nacional de Estadística e Informática del Perú (INEI), al 31 de marzo de 2018, el Perú tenía una población de 30 millones 657 mil 614 personas, cifra inferior a las 40 millones 20 mil 419 líneas móviles en servicio.

De acuerdo con la participación de líneas móviles en servicio por empresa operadora, a marzo de 2018, Telefónica del Perú ocupó el primer lugar con 15.1 millones de líneas en servicio (38% de participación), seguido de América Móvil con 12.6 millones (32% de participación) y, de Entel y Viettel con 6.8 (17%) y 5.4 (13%) millones, respectivamente.

2.2 Concentración del mercado

La evolución de la concentración del mercado en el servicio móvil (representado por el Índice de Hirschman-Herfindahl, en adelante HHI⁷) presenta una tendencia decreciente. La Figura 2 muestra que el HHI en enero de 2006 alcanzó el valor de 4,886; mientras que a marzo de 2018 dicho indicador fue de 2,891⁸.

A fin de observar la desconcentración del mercado móvil en los últimos cuatro años, la siguiente figura también presenta una comparación de las participaciones de mercado de las empresas operadoras antes del relanzamiento de la Portabilidad Numérica Móvil - PNM (junio de 2014), el desbloqueo de equipos móviles y el ingreso de Entel y Viettel, conjuntamente con las actuales participaciones de mercado (marzo de 2018).



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

⁷ Llamado HHI por sus siglas en inglés. El HHI se calcula a partir de las participaciones de mercado (m_i) de cada empresa operadora, de acuerdo con la siguiente fórmula: $HHI = \sum_{i=1}^n m_i^2$. Esta fórmula castiga a mayores participaciones; es decir, mientras mayor participación tenga un operador, el HHI se elevará en una mayor magnitud.

⁸ El Departamento de Justicia de Estados Unidos (DOJ) clasifica las concentraciones de mercado de acuerdo al nivel del HHI:

- $HHI < 1500$ – Mercado no concentrado
- $1500 \leq HHI < 2500$ – Mercado moderadamente concentrado
- $HHI \geq 2500$ – Mercado altamente concentrado

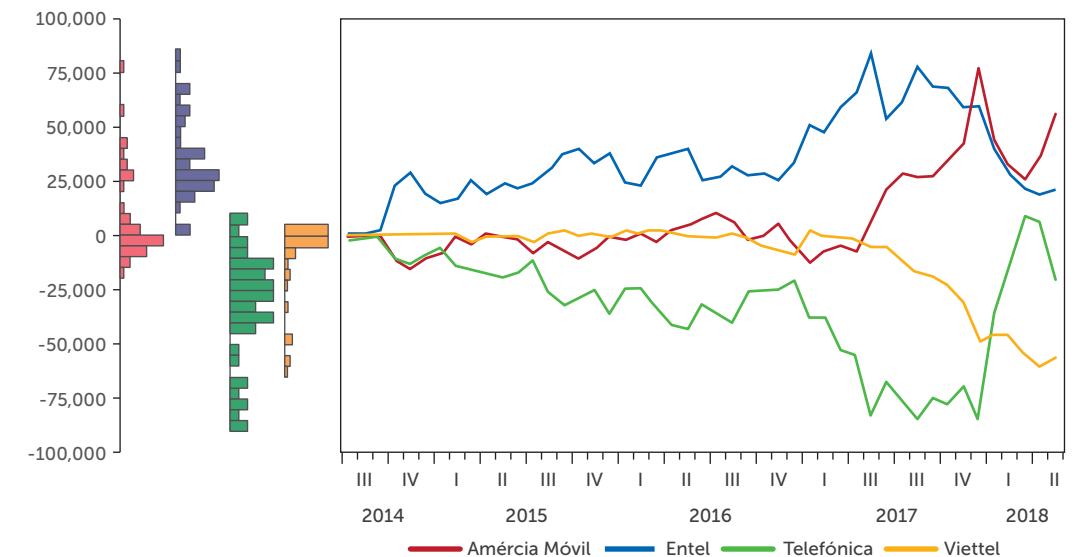
Cabe señalar que estos mismos umbrales han sido adoptados por las diferentes autoridades de competencia a nivel mundial.

2.3 Número de teléfonos móviles efectivamente portados

La PNM ha mantenido una alta aceptación entre los usuarios desde su relanzamiento, lo cual se refleja en la cantidad de portaciones efectuadas desde ese momento. Solo en mayo de 2018 se registró un total de 703,772 líneas portadas, cifra 13.9% superior a la registrada en el mes anterior y que permite sumar un total de 9,008,415 portaciones desde junio de 2014.

Respecto de la posición neta acumulada, entre el 16 de julio de 2014 y el 31 de mayo de 2018, Telefónica del Perú es la empresa operadora que perdió una mayor cantidad de abonados (-1,529,539 líneas). Mientras tanto, Entel capturó una posición neta de 1,631,019 portaciones. La siguiente figura presenta la evolución de la cantidad de portaciones (en términos netos) por empresa operadora. (Ver figura 3).

Figura 3:
Evolución de líneas móviles en servicio efectivamente portadas (en términos netos), a nivel de empresa operadora
(Julio 2014 – mayo 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

Entel es la empresa que más usuarios ha obtenido por la PNM; sin embargo, esta cifra se ha reducido en los dos últimos trimestres. Por el contrario, América Móvil pasó de presentar portaciones netas cercanas a cero a presentar portaciones positivas (incluso un número de portaciones mayor a la de Entel).

Por su parte, Telefónica del Perú en los últimos trimestres ha venido mejorando su posición neta, mientras que Viettel se ha convertido en la empresa que más usuarios ha perdido por portabilidad en los dos últimos trimestres.

3

TRATAMIENTO PREVIO DE LA SERIE

Cualquier metodología para predecir los valores futuros de algún indicador (o variable) se basa principalmente sobre sus propios valores en los periodos pasados (esto es, sobre su serie histórica). Sin embargo, antes de realizar cualquier predicción, el comportamiento de la serie histórica debe satisfacer algunos supuestos:

- (i) La serie debe ser **No Estacional**.
- (ii) La serie debe ser **Estacionaria**.

Por tanto, resulta necesario analizar y observar si la serie histórica cumple con los supuestos (i) y (ii). En caso de que esta no cumpla con alguno de los supuestos, es necesario corregirla. Como referencia se utilizará el indicador de número de líneas móviles en servicio.

3.1 Estacionalidad

Toda serie está constituida por cuatro componentes no observables: (i) *Tendencial* (T_t), (ii) *Cíclico* (C_t), (iii) *Estacional* (E_t) e (iv) *Irregular* (I_t). Cada uno de estos componentes debe ser considerado al momento de "limpiar" la serie de aquellos factores exógenos que no son de interés.

Existen diversas pruebas estadísticas que permiten detectar la existencia de estacionalidad dentro de una serie, como son el *F-Test* y el Test no-paramétrico de *Kruskal-Wallis*. Estas pruebas tienen como hipótesis nula de que la serie histórica es No Estacional.

Tabla 1:

Prueba No-Paramétrica de Kruskal-Wallis⁹ para detectar Estacionalidad (Serie líneas móviles en servicio)

Estadístico de Kruskal-Wallis	Grados de Libertad	Probabilidad
73.3154	11	0.00

Elaboración propia.

⁹ El Test de Kruskal-Wallis emplea el siguiente estadístico (W):
$$W = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{S_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

Empleando como indicador el número de líneas móviles en servicio, el estadístico de Kruskal-Wallis (W) arrojó un p -value asociado menor a 0.05, por lo que se rechaza la hipótesis nula de No Estacionalidad.

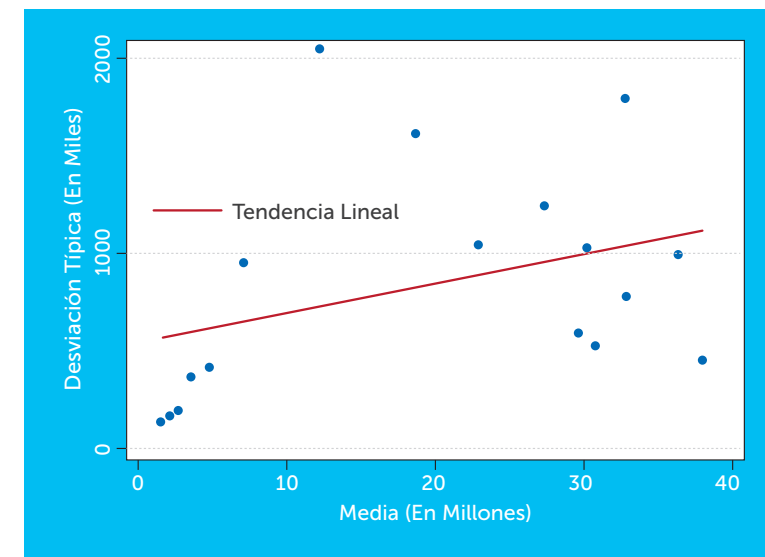
Dado que la serie histórica de líneas móviles en servicio es estacional, resulta necesario "desestacionalizarla". Para ello se elige un modelo de desagregación de la serie en sus cuatro componentes. Los modelos más utilizados son:

- El modelo aditivo: $X_t = T_t + C_t + E_t + I_t$
- El modelo multiplicativo: $X_t = T_t * C_t * E_t * I_t$
- El modelo log-aditivo: $\text{Log}(X_t) = T_t + C_t + E_t + I_t$

Con el propósito de seleccionar el modelo más adecuado se recurre a una figura que relaciona el valor promedio y la desviación estándar de la serie histórica. En caso de que dicha figura muestre una tendencia creciente, se aplica un modelo multiplicativo; mientras que, en el caso de que no muestre una tendencia (constante) se aplica un modelo aditivo.

Con base en la serie histórica de líneas móviles en servicio, la presencia de una tendencia creciente en la relación promedio-desviación estándar señala que el mejor modelo debe ser uno de corte multiplicativo.

Figura 4:
Dispersión Promedio-Desviación Estándar de la serie
LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO



Elaboración propia.

Luego se selecciona la metodología que se implementará para la descomposición de la serie histórica. Entre las metodologías se encuentran *Tramo Seats*, *Census X-11* y *Census X-12*. Para este caso se emplea la metodología *Census X-12*.

Algebraicamente la descomposición de la serie histórica (X_t) conlleva a la aplicación de los siguientes pasos (P1 a P5). Sin embargo, es necesario mencionar que –más allá de la estimación de cada uno de dichos pasos– cualquier software econométrico arroja los resultados de manera instantánea, sin efectuar cálculos adicionales (Ver Anexo 1)¹⁰.

P1. Para estimar el componente tendencia-ciclo (TC_t) se efectúa un promedio móvil centrado de 12 términos.

$$TC_t = \frac{1}{24} X_{t-6} + \frac{1}{12} \sum_{i=-5}^5 X_{t+i} + \frac{1}{24} X_{t+6}$$

P2. Para estimar el componente estacional-irregular (EI_t) se dividen los valores de la serie original entre los valores del componente tendencia-ciclo hallados en P1.

$$EI_t = \frac{X_t}{TC_t}$$

P3. Para obtener el componente estacional (E_t) se estima un promedio móvil de tres términos utilizando los valores de EI_t para cada mes.

$$E_t = \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^1 EI_{t+12i}$$

P4. El componente irregular (I_t) se obtiene del ratio entre los valores de EI_t y E_t .

$$I_t = \frac{EI_t}{E_t}$$

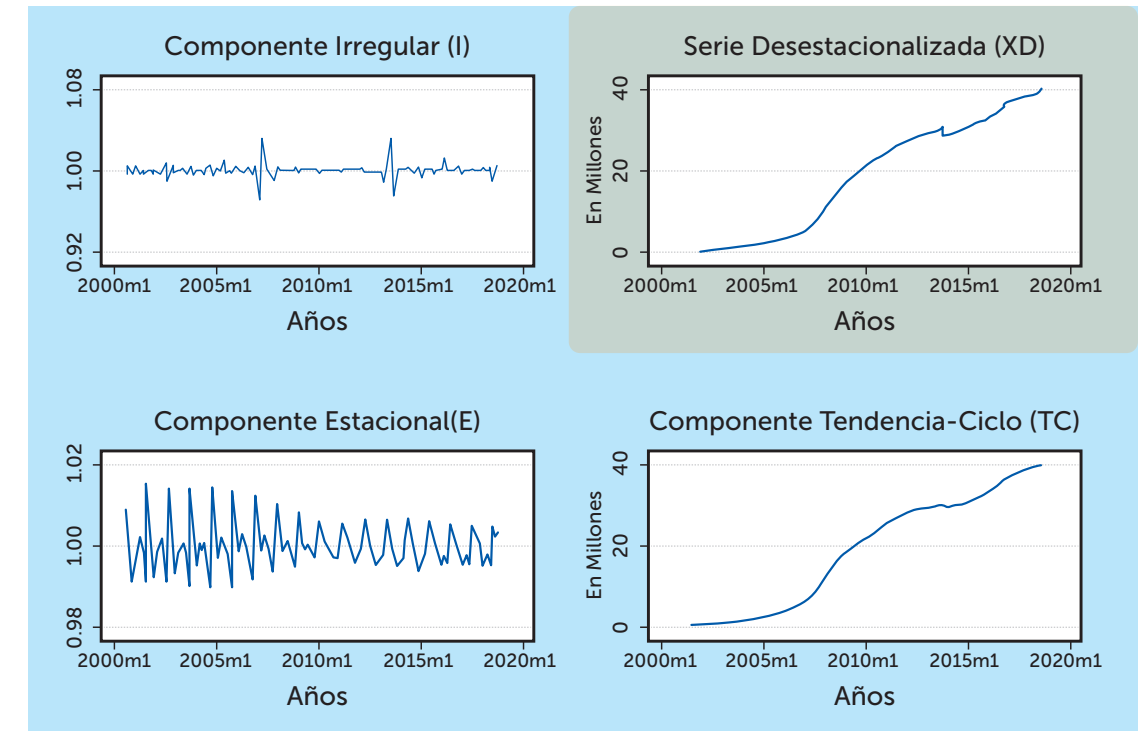
P5. Finalmente, la serie desestacionalizada (XD_t) resulta de dividir los valores de la serie original entre los valores del componente estacional.

$$XD_t = \frac{X_t}{E_t}$$

¹⁰ El Anexo 1 muestra la secuencia que debe seguirse para descomponer una serie temporal bajo el software EViews.

A continuación se muestra la desagregación de la serie histórica de líneas móviles en servicio en sus cuatro componentes.

Figura 5:
Descomposición de la evolución de la serie de
LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO



Elaboración propia.

Para el análisis, la serie histórica de interés es la sombreada en la figura anterior (Serie Desestacionalizada (XD)). A partir de dicha serie sobre líneas móviles en servicio “desestacionalizada” se obtendrán los resultados que se muestran en el resto del documento.

Finalmente, a través de la *Prueba Q* puede evaluarse la calidad del ajuste estacional de la serie histórica. Mientras más cercano a cero se encuentre Q , mejor será el ajuste estacional.

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{11} w_i M_i}{w_i}, Q \in [0, 3]$$

donde M_i es un conjunto de estadísticos de evaluación sobre la calidad de ajuste estacional y w_i son las ponderaciones que se le da a cada uno de esos estadísticos. Para el caso de las líneas móviles en servicio se estimó un valor de $Q = 0,68$, lo que significa que existe un buen ajuste de la serie desestacionalizada.

3.2 Estacionariedad

Una serie es estacionaria si su media y varianza son invariantes en el tiempo. Además, la covarianza entre dos periodos solo depende de su distancia o rezago, y no del tiempo en el que se estime la covarianza¹¹.

Con el objetivo de detectar si existe estacionariedad (inexistencia de raíces unitarias) o no-estacionariedad (presencia de raíces unitarias), se recurre a las pruebas de Dickey-Füller Aumentado (ADF) y a la de Phillips-Perron (P-P)¹². Para ello se plantea lo siguiente:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t, \quad \text{con } \delta = (\rho - 1)$$

Las hipótesis estadísticas de este tipo de pruebas son como siguen:

$$H_0: \delta = 0 \quad (\text{la serie no es estacionaria})$$

$$H_1: \delta \neq 0 \quad (\text{la serie es estacionaria})$$

Los resultados de las pruebas ADF y P-P para la serie histórica de líneas móviles en servicio se muestran en la Tabla 2¹³.

Tabla 2:
Pruebas ADF y P-P para la detección de Estacionariedad sobre la serie histórica de LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

Test Critical Values	Augmented Dickey-Füller test statistic (Prueba ADF)		Phillips - Perron test statistic (Prueba P-P)	
	t-Statistic	Prob.*	Adj. T-Stat	Prob.*
	-1.732509	0.7333	-1.706414	0.7452
1% level	-4.003902		-4.003226	
5% level	-3.432115		-3.431789	
10% level	-3.139793		-3.139601	

(*) Mackinnon (1996) one-side p-values

Elaboración propia.

La tabla anterior muestra que los valores *p-value* asociados a las pruebas ADF y P-P son mayores a 0.05, por lo que se acepta la hipótesis nula de que la serie es No Estacionaria. Para transformarla a una serie estacionaria se debe estimar la primera diferencia al logaritmo de la serie histórica (*Dlog*).

Luego, la siguiente tabla muestra que al extraer la primera diferencia al logaritmo (*Dlog*) de la serie de líneas móviles en servicio, esta se convierte en serie estacionaria. En particular, el *p-value* del test ADF es 0.0451, mientras que el del test P-P es 0.00.

¹¹ Esto es:

- Media: $E(Y) = \mu$
- Varianza: $Var(Y) = E(Y - \mu)^2 = \sigma^2$
- Covarianza: $\gamma_s = E[(Y - \mu)(Y_{t-s} - \mu)]$

¹² También existen otros métodos para detectar la existencia de estacionariedad de una serie. Como "métodos informales" se tiene el análisis gráfico y el análisis de correlograma; en cuanto a "métodos formales" están la prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), la prueba de Elliott-Rothenberg-Stock (ERS) y la de Ng Perron.

¹³ El Anexo 2 muestra la secuencia que debe seguirse para detectar si existe estacionariedad en la serie temporal.

Tabla 3:
Pruebas ADF y P-P para la detección de Estacionariedad sobre la *Dlog* de la serie LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

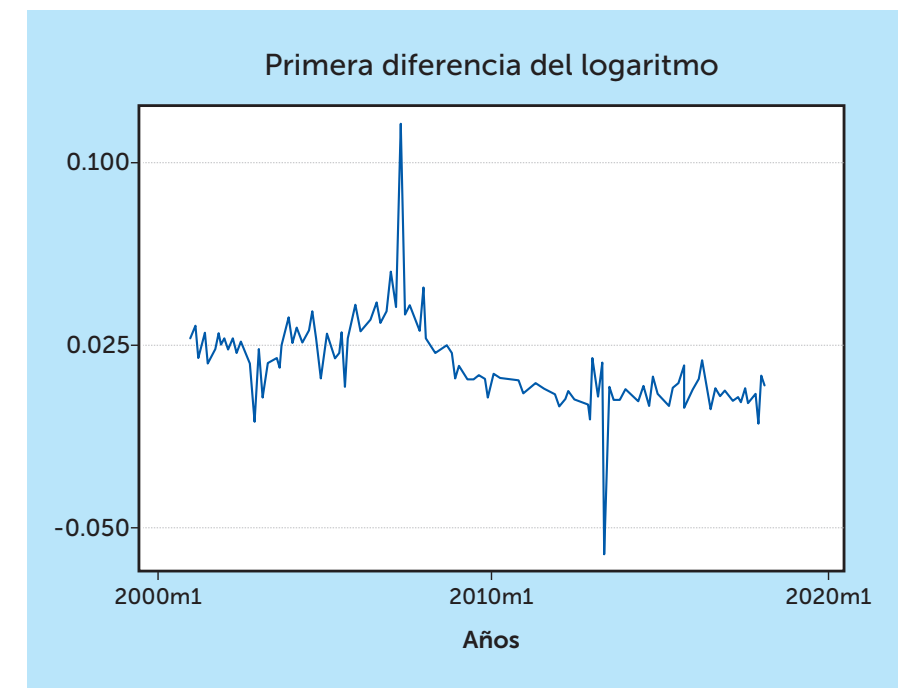
Test Critical Values	Augmented Dickey-Füller test statistic (Prueba ADF)		Phillips - Perron test statistic (Prueba P-P)	
	t-Statistic	Prob.*	Adj. T-Stat	Prob.*
	-3.472672	0.0451	-9.723775	0.000
1% level	-4.003902		-4.003449	
5% level	-3.432115		-3.431896	
10% level	-3.139793		-3.139664	

(*) Mackinnon (1996) one-side p-values

Elaboración propia.

Lo anterior también se constata a través de la siguiente figura, en la que se muestra que con la *Dlog* ya se presenta Estacionariedad.

Figura 6:
Primera diferencia de la serie LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO



Elaboración propia.

4

METODOLOGÍAS DE PREDICCIONES

Cuando la serie temporal de algún indicador ya es no-estacional y estacionaria, se recurre al empleo de metodologías de predicción para pronosticar el comportamiento que tendrá dicho indicador. Casi siempre es necesario realizar predicciones con más de una metodología a fin de comparar y observar cuál es la predicción más precisa y robusta¹⁴. Entre las principales metodologías univariadas se encuentran:

Tabla 4:
Metodologías (y sus correspondientes versiones) para el análisis de predicción

METODOLOGÍA			
BOX-Jekins (Procesos ARIMA)	Exponential Smoothing (Suavizamiento Exponencial)	Regresiones Polinomiales (o Tendencia Determinística)	Cecimiento Promedio Anual
Muchos modelos:	Suavizamiento Exponencial Doble	Regresión Polinómica Simple	Estimación de la Tasa de Crecimiento Promedio
AR(p)	Holt-Winters Aditivo	Regresión Polinómica Cuadrática	
MA(q)	Holt-Winters Multiplicativo	Regresión Polinómica Cúbica	
ARIMA(p,d,q)	Holt-Winters No Estacional	Regresión Polinómica Cuártica	
SARIMA(...)		(...)	

Elaboración propia.

El problema surge cuando ante tantas metodologías de predicción posibles (e incluso versiones dentro de cada metodología) debe decidirse por la que mejor pronostique al indicador. Para esto se estiman algunos estadísticos de decisión que permiten comparar entre las metodologías potenciales, con el objetivo de obtener la metodología (y su versión) más idónea para realizar predicciones¹⁵.

¹⁴ Como se verá más adelante, si bien la base teórica parece complicada, se debe mencionar que los paquetes informáticos desarrollan de manera casi automática cada metodología.

¹⁵ Por ello es frecuente que los interesados en predicciones las realicen empleando más de una metodología y sobre la base de dichos estadísticos compararla y obtener la metodología (con su versión) más idónea.

En adelante los estadísticos relevantes que se utilizarán para comparar entre metodologías (y versiones dentro de una metodología) serán el coeficiente de Desigualdad de Theil (en adelante, U-Theil), la Raíz del Error Cuadrático Medio (en adelante, RMSE) y los Criterios de Información de Akaike, Schwartz y Hanna Quinn¹⁶. Mientras que, U-Theil y RMSE serán los estadísticos utilizados para comparar entre versiones de Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales, los Criterios de Información serán utilizados para comparar dentro de Box-Jenkins.

A continuación se desarrolla brevemente la base teórica de cada metodología. Sin embargo, el lector que no esté interesado en la formalidad de las metodologías de predicción podría obviar lo que queda de este capítulo.

4.1 METODOLOGÍA DE BOX JENKINS¹⁷

Esta metodología considera que la serie temporal que se trata de predecir es generada por un proceso estocástico, cuya naturaleza puede ser caracterizada mediante un modelo. A esta metodología se le denominó *Procesos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA)*¹⁸. A continuación se muestran brevemente sus componentes *AR* y *MA*, el mismo proceso *ARIMA* y la extensión *SARIMA*.

4.1.1 Proceso Autorregresivo: $AR(p)$

Los rezagos de una variable se expresan de manera simbólica por el término $AR(AR(1), AR(2), AR(3), \dots)$ dependiendo de la cantidad de rezagos que se desea incluir. La forma general de un modelo $AR(p)$ viene dado por:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t$$

Esto indica que la variable y_t es explicada únicamente por sus " p " valores rezagados. Para ver si el proceso AR es estacionario se aplican operadores de rezago:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + a_t$$

$$y_t (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) = \phi_0 + a_t$$

$$y_t \varphi_p(L) = \phi_0 + a_t$$

¹⁶ Estos estadísticos relevantes son calculados de la siguiente manera:

$$U\text{-Theil} = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(\hat{y}_t)^2}{n} + \sum_{t=1}^n \frac{(y_t)^2}{n}}}, RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}$$

¹⁷ En el Anexo 6 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

¹⁸ Por sus siglas en inglés, *Autoregressive Integrated Moving Average*.

¹⁹ Los modelos de series de tiempo no suelen comportarse exclusivamente como un Proceso Autorregresivo (*AR*) o un Proceso de Medias Móviles (*MA*). Normalmente las series presentan ambos patrones de comportamientos, por esto se suele modelar bajo la *ARIMA*.

El proceso AR es estacionario solo si las raíces del polinomio $\varphi_p(L)$ son mayores a 1.

$$\varphi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$$

Admitiendo la posibilidad de que algunas raíces sean imaginarias, estas deben tener un módulo mayor a 1²⁰.

4.1.2 Proceso de Medias Móviles: $MA(q)$

Los términos de error de la serie se suelen representar por la expresión $MA(MA(1), MA(2), MA(3), \dots)$, dependiendo de la cantidad de términos de error que se incluya en el análisis.

La expresión general de un proceso $MA(q)$ es:

$$y_t = c + \theta_0 u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

De manera general, un $MA(\infty)$ tendrá la siguiente representación:

$$y_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i u_{t-i}$$

Donde,

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 \\ E(u_t^2) &= \sigma^2 \\ \gamma_{t,s} = C(u_t, u_{t-s}) &= 0, \quad t \neq s \end{aligned}$$

4.1.3 Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles $ARIMA(p, d, q)$

Como se trabaja con series ya estacionarias, el orden de integración de las variables será 0. Así, un modelo de este tipo sería un $ARIMA(p, 0, q)$ o simplemente $ARMA(p, q)$, la cual se expresa bajo la siguiente notación:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_0 u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j u_{t-j}$$

²⁰ Todo proceso AR estacionario puede ser expresado como un $MA(\infty)$.

Como ejemplo, un proceso $ARMA(1, 1)$ vendría dada por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$$

Para que un modelo $ARMA$ sea estacionario solo basta observar si su componente AR es estacionario. Si se cumple que $|\phi| < 1$, el proceso es estacionario.

Realizando sustituciones sucesivas se puede obtener la representación $MA(\infty)$ de este proceso.

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + u_t + (\phi + \theta) \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{i-1} u_{t-i}$$

La media del proceso es $c/(1-\phi)$, la misma que no depende del tiempo. La varianza (γ_0) y la autocovarianza (γ_1) tendrán la siguiente estructura:

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{(1 + 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \quad y \quad \gamma_1 = \sigma^2 \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 - \phi^2}$$

Donde se cumple que $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$ para $k \geq 2$.

4.1.4 Modelo Autorregresivo Estacional Integrado de Medias Móviles

Una extensión de los modelos $ARIMA$ son los modelos $SARIMA$ (modelo $ARIMA$ + Componente estacional), debido a la complejidad y amplitud de su desarrollo se obvia la demostración de este tipo de modelos. La forma general de un modelo $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ es la siguiente:

$$\varphi_p(L)\Phi_p(L^s)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \theta_q(L)\Theta_q(L^s)u_t$$

Donde:

s : Componente estacional (en nuestro caso será 12, por ser data mensual)

$\varphi_p(L)$: polinomio de rezagos del componente $AR(p)$

$\Phi_p(L^s)$: polinomio de rezagos del componente AR estacional (P)

Δ^d : operador de diferencias de orden "d"

Δ_s^D : operador de diferencias el componente estacional "s"

$\theta_q(L)$: polinomio de rezagos del componente $MA(q)$

$\Theta_q(L^s)$: polinomio de rezagos del componente MA estacional (Q)

4.2 METODOLOGÍA SOBRE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL

El Suavizamiento Exponencial es una metodología de predicción que asigna mayores ponderaciones a las observaciones más recientes, con la característica de que las ponderaciones asignadas van reduciéndose de manera exponencial a medida que las observaciones son más distantes al periodo actual.

Existen diversas versiones de esta metodología. El uso de una u otra versión depende del ajuste y las características de la distribución de los datos. Nuevamente, las diversas versiones pueden ser comparadas a través de estadísticos como la U-Theil y la RMSE, a fin de observar cuál es la versión más precisa con base a esta metodología.

Específicamente existen seis versiones de esta metodología:

4.2.1 Suavizamiento Exponencial Simple

Esta versión es apropiada para series que se mueven aleatoriamente alrededor de un valor promedio (sin tendencia ni patrones estacionales). La serie suavizada \hat{y}_t de y_t se estima de manera recursiva:

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Para ello, se necesita un valor inicial de \hat{y}_t y un valor para α . Las predicciones bajo esta versión son constantes para las observaciones futuras. Dicha constante viene dada por:

$$\hat{y}_{T+k} = \hat{y}_T, \quad \forall k > 0$$

Donde T es la última observación de la muestra de estimación.

4.2.1 Suavizamiento Exponencial Doble o versión de Holt

Esta versión aplica Suavizamiento Exponencial simple dos veces. Es apropiada para series que tienen una tendencia lineal. La serie y es definida por las recursiones:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \\ D_t &= \alpha S_t + (1 - \alpha)D_{t-1} \end{aligned}$$

Donde S es la serie suavizada simple, D es la serie suavizada doble y $0 < \alpha < 1$. Las predicciones de Suavizamiento Exponencial doble son estimadas como:

$$\hat{y}_{T+k} = 2S_T - D_T + \frac{\alpha}{1 - \alpha}(S_T - D_T)k$$

La expresión $\alpha(S_T - D_T)/(1 - \alpha)$ nos indica la pendiente.

4.2.3 Versión de Holt-Winters Multiplicativo

Esta versión es empleada cuando las series tienen una tendencia lineal y variación estacional multiplicativa²¹. La serie suavizada \hat{y}_t está dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = (a + bk)c_{t+k}$$

Donde a es el componente permanente; b es la tendencia y c_t es el factor estacional multiplicativo. Estos coeficientes son definidos por las siguientes recursiones:

$$a(t) = \alpha \frac{y_t}{c_t(t-s)} + (1 - \alpha)(a(t-1) + b(t-1))$$

$$b(t) = \beta(a(t) - a(t-1)) + b(1 - \beta)(t-1)$$

$$c_t(t) = \gamma \frac{y_t}{a(t)} + c_t(1 - \gamma)(t-s)$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento y s es la frecuencia de la estacionalidad. Las predicciones son estimadas como:

$$\hat{y}_{t+k} = (a(T) + b(T)K)c_{T+k-s}$$

4.2.4 Versión de Holt-Winters Aditivo

Esta versión es apropiada para series con una tendencia temporal lineal y variación estacional aditiva. La serie suavizada \hat{y}_t viene dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = a + bk + c_{t+k}$$

²¹ Esta versión tiene la ventaja de adaptarse fácilmente a medida que se tiene nueva información disponible.

Donde a , b y c son los componentes permanente, tendencial y estacional aditivo. Los tres coeficientes son definidos por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$a(t) = \alpha(y_t - c_t(t-s)) + (1-\alpha)(a(t-1) + b(t-1))$$

$$b(t) = \beta(a(t) - a(t-1)) + 1 - \beta b(t-1)$$

$$c_t(t) = \gamma(y_t - a(t+1)) + \gamma c_t(t-s)$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento y s es la frecuencia de la estacionalidad. Las predicciones son calculadas como:

$$\hat{y}_{t+k} = a(T) + b(T)K + c_{T+k-s}$$

4.2.5 Versión de Holt-Winters No-Estacional

Esta versión es empleada en series con tendencia lineal, pero sin componente estacional. Esta versión es muy similar a la de suavizamiento estacional doble, ya que ambas generan predicciones con una tendencia lineal y sin componente estacional. La serie suavizada \hat{y}_t está dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = a + bk$$

Los coeficientes a y b se definen por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$a(t) = \alpha y_t + (1-\alpha)(a(t-1) + b(t-1))$$

$$b(t) = \beta(a(t) - a(t-1)) + 1 - \beta b(t-1)$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento. Las predicciones son calculadas como:

$$\hat{y}_{T+k} = a(T) + b(T)k$$

4.2.6 Versión de Suavizamiento Exponencial Cuadrático o versión de Brow

Las versiones estudiadas (en 4.2.1. al 4.2.5) arrojan resultados con un elevado error al intentar predecir series temporales que presentan una tendencia no lineal en su comportamiento.

Sin embargo, en estos casos se emplea la versión cuadrática o de Brow. La idea detrás de esta versión es aplicar un triple Suavizamiento Exponencial.

Las predicciones sobre Suavizamiento Exponencial cuadrático son estimadas de la siguiente manera:

$$\hat{y}_{T+k} = 3S'_T - 3S''_T + S'''_T + k \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} [(6-5\alpha)S'_T - (10-8\alpha)S''_T + (4-3\alpha)S'''_T] \\ + k^2 \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} (S'_T - 2S''_T + S'''_T)$$

Donde S' es la serie suavizada simple, S'' es la serie suavizada doble, S''' es la serie suavizada triple y α es el factor de Suavizamiento Exponencial que pertenece al intervalo $[0,1]$. Además,

$$S'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S'_{t-1}$$

$$S''_t = \alpha S'_t + (1-\alpha)S''_{t-1}$$

$$S'''_t = \alpha S''_t + (1-\alpha)S'''_{t-1}$$

4.3 METODOLOGÍA SOBRE REGRESIONES POLINOMIALES

Esta metodología es una extensión a los modelos de regresión lineal. Para ello, se plantea una ecuación de grado " n ". En muchos casos la variable independiente del modelo de regresión es el tiempo.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Para aplicar el método de mínimos cuadrados ordinarios se parte de la función de regresión muestral:

$$y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_i + \hat{a}_2x_i^2 + \dots + \hat{a}_nx_i^n + \hat{u}_i, \quad ,$$

donde \hat{a}_i son los estimadores y \hat{u}_i los residuos de la regresión. Minimizando la suma de los residuos al cuadrado (S).

$$S = \sum_{i=0}^m \hat{u}_i^2 = \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1x_i - \hat{a}_2x_i^2 - \dots - \hat{a}_nx_i^n)^2$$

Las derivadas parciales están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{(da_0)} &= -2 \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_2 x_i^2 - \dots - \hat{a}_n x_i^n) = 0 \\ \frac{dS}{(da_1)} &= -2x_i \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_2 x_i^2 - \dots - \hat{a}_n x_i^n) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{dS}{(da_n)} &= -2x_i^n \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_2 x_i^2 - \dots - \hat{a}_n x_i^n) = 0\end{aligned}$$

En base a las derivadas parciales presentadas, se realiza una representación matricial del sistema de ecuaciones normales asociadas.

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A_x &* \hat{a} = A_{xy} \\ \hat{a} &= A_x^{-1} * A_{xy}\end{aligned}$$

Siempre y cuando la matriz A_x sea invertible, se puede hallar el vector de estimadores \hat{a} . Para los propósitos del presente documento, la variable " x " viene representada por el tiempo $t \in [0, \dots, m]$.

4.4 METODOLOGÍA SOBRE TASA DE CRECIMIENTO PROMEDIO COMPUESTA

Esta es una de las metodologías de más fácil aplicación²² (no se requiere ninguna condición previa). Para su implementación se considera el valor inicial y el valor final que tomó el indicador en cuestión. Así, sea t_0 y t_n el valor inicial (pasado) y el valor final (presente) del indicador, se calcula la tasa de crecimiento y se supone que –para los siguientes periodos– el indicador crecerá a la misma tasa. De esta forma la tasa de crecimiento viene dada por:

$$\text{Tasa de crecimiento} = \left(\frac{\text{Valor Presente } (t_n)}{\text{Valor Pasado } (t_0)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

²² Es necesario que los intervalos de tiempos sean regulares (por ej. mensual, trimestral, etc.)

Donde " n " es el tamaño de la serie. Por tanto, el valor estimado para cada uno de los siguientes datos puede ser estimado de la siguiente forma:

$$\text{Valor presente} = \text{Valor pasado} * (1 + \text{Tasa de Crecimiento})^n$$



5 TEST DE DIEBOLD Y MARIANO

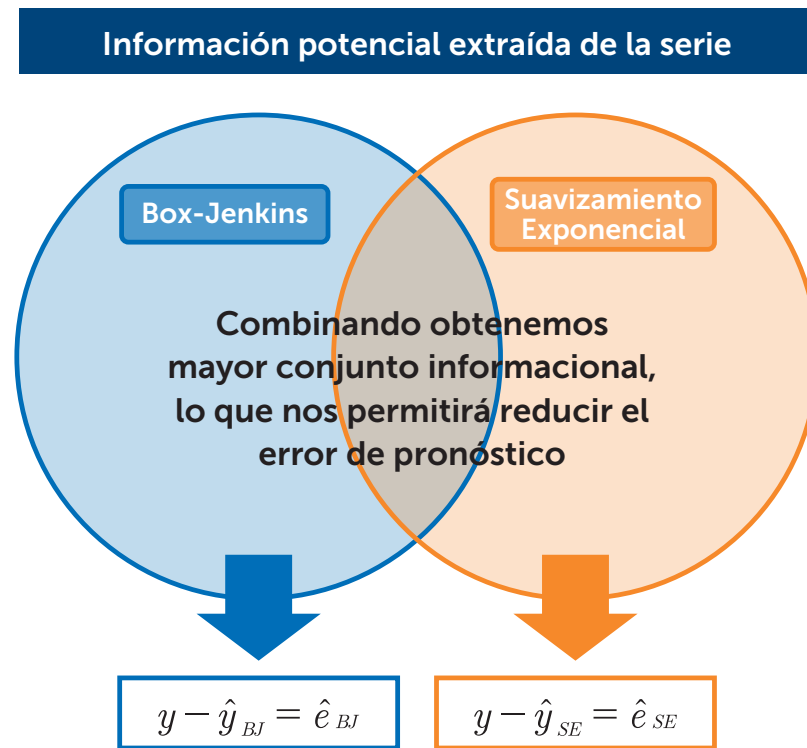
Como se mencionó anteriormente es frecuente que los agentes estimen valores de predicción diferentes para un mismo indicador, a pesar de que se utilicen los mismos datos históricos. Esto puede suceder cuando se utilizan distintas metodologías. Al respecto, cada metodología maneja la información de manera diferente y, por ende, extrae información distinta, la misma que – independientemente de la metodología que se aplique– puede ser considerada como información valiosa.

Luego, ante la presencia de predicciones bajo distintas metodologías, es común observar que los investigadores –a través de distintos estadísticos– opten por utilizar una única técnica de predicción. Sin embargo, si bien estas técnicas permiten escoger el mejor modelo de predicción, cuando se deja de lado el resto de técnicas es muy probable que no se considere información importante que la técnica seleccionada no capturó.

En base a esto, existe una prueba estadística importante (y relativamente nueva) que permite conocer si efectivamente la metodología "más idónea" es la que mejor predice los datos; o en su defecto, si una posible combinación de las mejores predicciones obtenidas por dos o más metodologías arroja un resultado más robusto. Este test fue propuesto por Diebold y Mariano (1995). Por tanto, según este test, si se considera más de una metodología es probable que la predicción se ajuste más a los datos si las metodologías colaboran con diferente información valiosa.

La siguiente figura muestra que si bien ambas metodologías (Box-Jenkins y Suavizamiento Exponencial) consideran como “información valiosa” parte de la información potencial que brinda la serie de datos histórica, también se muestra que cada metodología utiliza información que no es considerada por la otra metodología. Esta combinación de metodologías se puede generalizar para un mayor número de metodologías potenciales a ser utilizadas.

Figura 7:
Extracción de información sobre la base de las metodologías de predicción
(Base para la prueba de Diebold y Mariano)



Elaboración propia.

En este documento se considera la comparación de metodologías individuales y combinación de metodologías hasta un máximo de tres metodologías. A saber: Suavizamiento Exponencial, Box-Jenkins y Regresiones Polinomiales.

5.1 Para predicciones empleando combinación de dos metodologías

Para evaluar si dos metodologías de predicción conjuntas podrían explicar de manera más robusta el comportamiento de una serie en comparación a una metodología individual, se realiza una combinación lineal convexa de los valores predichos por ambas metodologías \hat{y}_1 y \hat{y}_2 ²³.

$$\hat{y}_c = \alpha \hat{y}_1 + (1 - \alpha) \hat{y}_2$$

Donde, $\alpha \in [0, 1]$. El problema radica en encontrar el ponderador óptimo (α) que minimice el Error Cuadrático Medio (*ECM*) de \hat{y}_c . Esto es que el *ECM* de la combinación sea menor que el *ECM* de las predicciones de manera individual (*ECM* de \hat{y}_1 y el *ECM* de \hat{y}_2).

Si se asume que los errores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son insesgados, entonces los errores de predicción también serán insesgados. Bajo este supuesto se obtiene la siguiente equivalencia.

$$ECM[\hat{e}_c] = Var[\hat{e}_c]$$

Mediante algunas manipulaciones algebraicas con el objetivo de encontrar una combinación lineal de los errores de predicción²⁴.

$$\begin{aligned} \hat{y}_c - y &= \alpha(\hat{y}_1 - y) + (1 - \alpha)(\hat{y}_2 - y) \\ \hat{e}_c &= \alpha(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)(\hat{e}_2) \end{aligned}$$

Aplicando varianza en ambos lados de esta última expresión,

$$\begin{aligned} Var(\hat{e}_c) &= Var[\alpha(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)(\hat{e}_2)] \\ Var(\hat{e}_c) &= \alpha^2 Var(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)^2 Var(\hat{e}_2) + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \end{aligned}$$

En tal sentido, minimizar el *ECM* (o la varianza) significa que:

$$\begin{aligned} \frac{dVar(\hat{e}_c)}{d\alpha} &= 2\alpha Var(\hat{e}_1) - 2(1 - \alpha) Var(\hat{e}_2) + 2(1 - 2\alpha)Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = 0 \\ \alpha^* &= \frac{Var(\hat{e}_2) - Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)}{Var(\hat{e}_1) + Var(\hat{e}_2) - 2Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)} \end{aligned}$$

²³ Para fines prácticos se obvia los índices temporales y el horizonte de proyección de la serie “y”.

²⁴ La ventaja de trabajar con los errores de predicción es que estos son estacionarios.

De este modo se obtiene un *ECM* (de la combinación de predicciones) menor que los *ECM* de las predicciones individuales. Una forma alterna para obtener el ponderador óptimo α^* es por medio de una regresión *MCO* sobre la siguiente ecuación transformada,

$$\hat{e}_c = \alpha(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)(\hat{e}_2)$$

$$\rightarrow \hat{e}_2 = \alpha(\hat{e}_2 - \hat{e}_1) + \hat{e}_c$$

donde el error combinado (\hat{e}_c) es el residuo que se obtiene de la regresión. Esta forma es más fácil porque permite realizar pruebas de hipótesis sobre el ponderador α .

$$H_0: \alpha_{MCO} = 0$$

$$H_1: \alpha_{MCO} \neq 0$$

Si se acepta estadísticamente la hipótesis nula, significa que la metodología con la que se predijo \hat{y}_1 no aporta información relevante para mejorar la proyección obtenida por \hat{y}_2 . Por otro lado, si se rechaza estadísticamente la hipótesis nula significa que la metodología por la que se predijo \hat{y}_1 sí aporta información importante al predictor \hat{y}_2 , por lo que es mejor combinar metodologías de predicción.

5.2 Para predicciones empleando combinación de tres metodologías

Generalizando la combinación de predicciones para tres metodologías, se parte de la siguiente ecuación:

$$\hat{y}_c = \alpha\hat{y}_1 + \beta\hat{y}_2 + \theta\hat{y}_3 \quad \text{donde: } \alpha + \beta + \theta = 1$$

Por lo que puede establecerse el error combinado como sigue:

$$\hat{e}_c = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \theta\hat{e}_3$$

Para fines de la regresión *MCO* se tiene la siguiente expresión:

$$\hat{e}_c = \alpha\hat{e}_1 + (1 - \alpha - \theta)\hat{e}_2 + \theta\hat{e}_3$$

$$\rightarrow \hat{e}_2 = \alpha(\hat{e}_2 - \hat{e}_1) + \theta(\hat{e}_2 - \hat{e}_3) + \hat{e}_c$$

Teniendo como hipótesis nula,

$$H_0: \alpha_{MCO} = \theta_{MCO} = 0$$

$$H_1: \alpha_{MCO} = \theta_{MCO} \neq 0$$

Nuevamente, si no se rechaza la hipótesis nula, significa que las metodologías que predijeron \hat{y}_1 y \hat{y}_3 no aportan información relevante para mejorar la predicción de \hat{y}_2 . Por el contrario, si se rechaza la hipótesis nula, la mejor predicción se obtiene de combinar las metodologías de predicción²⁵.



6

APLICACIÓN Y RESULTADOS SOBRE PREDICCIONES

Se emplea la serie de número de líneas móviles en servicio, a fin de estimar el valor que tomará este indicador al cierre del año 2020. Para esto se considera información proveniente de la Norma de Requerimientos de Información Periódica (NRIP) del OSIPTEL²⁶. En particular se emplea como data histórica el número de líneas móviles mensuales desde enero de 2001 hasta marzo de 2018²⁷. En las secciones previas (3.1 y 3.2), esta serie fue tratada a fin de que sea no-estacional y estacionaria.

6.1 Predicciones a partir de distintas metodologías de manera individual

Las predicciones de las líneas móviles en servicio al cierre del 2020 son realizadas en base a distintas metodologías: (i) Suavizamiento Exponencial, (ii) Box-Jenkins (o Procesos ARIMA), (iii) Regresiones Polinomiales (o Tendencia Determinística), y (iii) Tasa de Crecimiento Promedio Compuesta.

²⁵ Notar que ahora la prueba de hipótesis es una prueba conjunta, por lo que se debe utilizar el estadístico F.

²⁶ Las predicciones realizadas a continuación se basan en información actualizada a junio de 2018. Así, cualquier cambio en los datos podría alterar los resultados obtenidos.

²⁷ Esto es, una serie compuesta por más de 200 observaciones para predecir 33 observaciones hacia adelante.

Como se mencionó, a su vez cada metodología presenta diversas versiones (ver Tabla 4 en Capítulo 4). Por ello, la primera tarea es estimar las predicciones y compararlas (de acuerdo a estadísticos como RMSE, U-Theil y Criterios de Información), con el propósito de conocer la versión de cada metodología que más se ajuste a la serie de datos históricos.

6.1.1 Predicción bajo Metodología de Suavizamiento Exponencial²⁸

La aplicación de Suavizamiento Exponencial muestra que la versión de Holt-Winters No Estacional es la más idónea. Esto, por presentar la menor U-Theil (0.0042) y la menor RMSE (195,855), en comparación al resto de versiones. La segunda versión más eficiente para esta metodología es la de Holt-Winters Aditivo, la cual cuenta con una RMSE de 202,178 y una U-Theil igual a 0.0043. (Ver siguiente Tabla).

Tabla 5:
Versión Más Idónea bajo Suavizamiento Exponencial para la serie de LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

Suavizamiento Exponencial	Estadísticos	
	RMSE	U-Theil
Holt-Winters Aditivo	202,178	0.0043
Holt-Winters No Estacional	195,855	0.0042
Suavizamiento Exponencial Doble	376,934	0.0081
Holt-Winters Multiplicativo	384,464	0.0082

Elaboración propia.

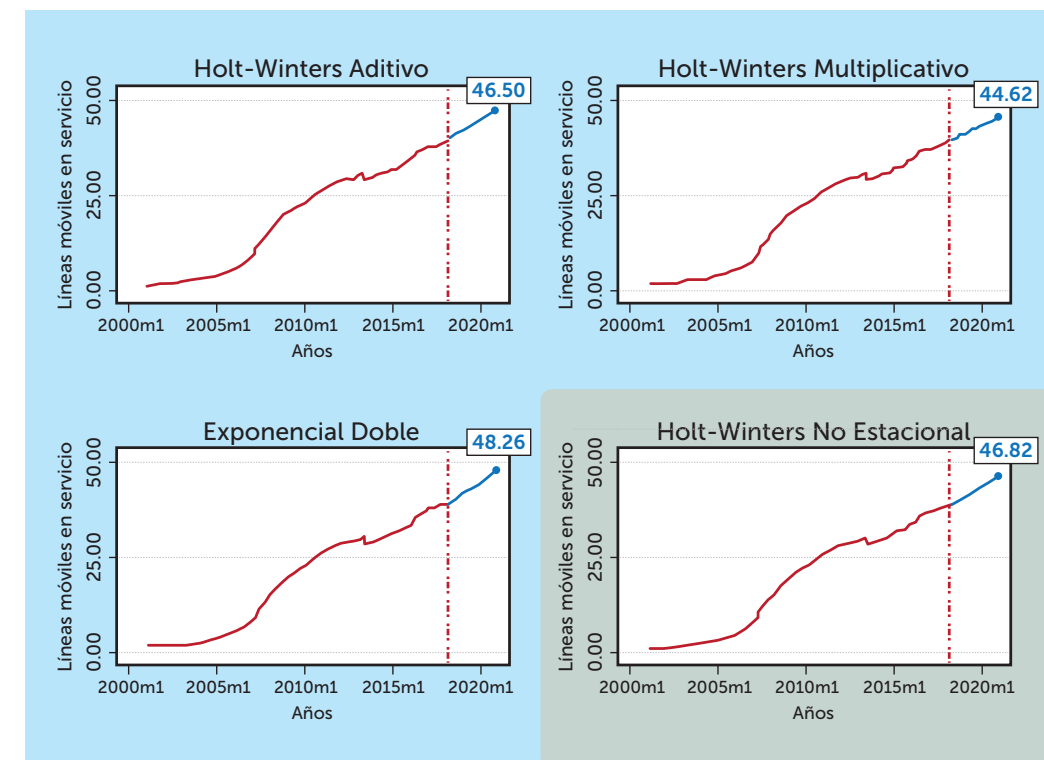
Los resultados mostrados en la Tabla 5 concuerdan con las predicciones presentadas en la siguiente figura. En efecto, ambas versiones (Holt-Winters No Estacional y Holt Winters Aditivo) estimaron una predicción similar para el total de líneas en servicio para el cierre del 2020 (46.8 millones y 46.5 millones, respectivamente).

Mientras que las otras dos versiones (Exponencial Doble y Holt-Winters Multiplicativo) arrojaron predicciones muy por debajo (o muy por encima) de los valores predichos por las versiones que mejor se ajustaron a la serie de datos analizada. Es por esta razón, que a dichas versiones se les asocia mayores niveles en los indicadores U-Theil y RMSE²⁹.

²⁸ En el Anexo 3 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

²⁹ En el Anexo 8 se muestra el análisis gráfico de los residuos para esta metodología en EViews.

Figura 8:
Predicciones para LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO sobre distintas versiones de la Metodología de Suavizamiento Exponencial (En Millones)



Elaboración propia.

6.1.2 Predicción bajo Metodología de Box-Jenkins³⁰

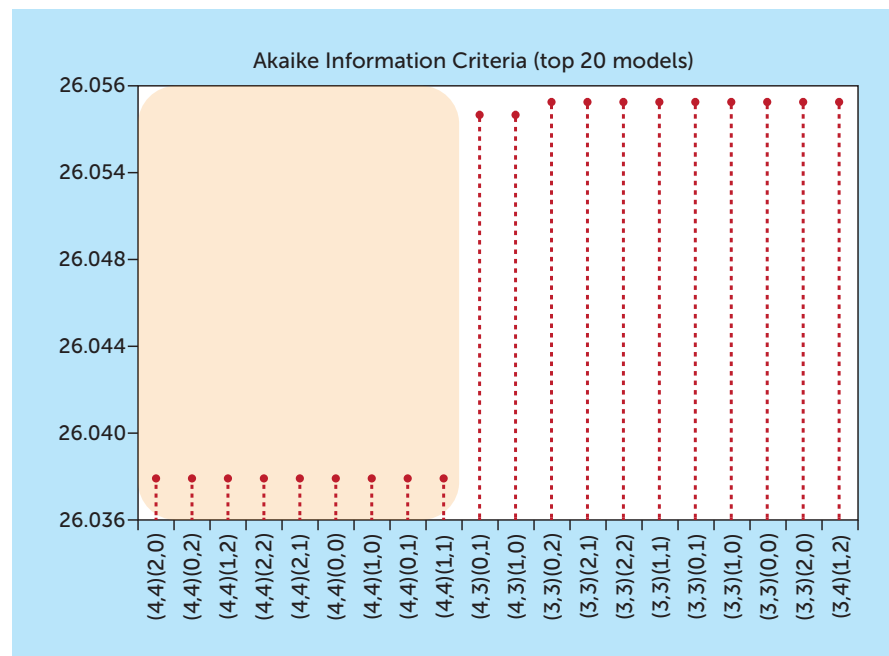
Hasta hace unos cuantos años, la elección de un modelo de predicción bajo la metodología de Box-Jenkins era un trabajo arduo, dado que esto se realizaba mediante un procedimiento de ensayo-error, lo cual conlleva a que –en muchas ocasiones– el modelo escogido no necesariamente sea el más idóneo.

No obstante, las últimas actualizaciones en muchos programas econométricos arrojan de manera inmediata el modelo más idóneo –bajo esta metodología– para la serie analizada. Incluso, además de presentar el mejor modelo de predicción para los datos históricos de la serie, también arroja un ranking con los modelos ARIMA que más se ajustan a la serie.

³⁰ En el Anexo 4 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

En el caso de la metodología de Box-Jenkins, los Criterios de Información (Akaike, Schwarz y Hannan-Quin) son preferibles a RMSE y a U-Theil, como estadísticos de decisión. Por ello, siguiendo los Criterios de información, el área sombreada de la figura izquierda muestra que existen varios modelos idóneos (con un valor de Akaike de 26.03). La tabla de la derecha confirma que cualquiera de esos cuatro modelos podrían ser empleados para realizar predicciones, al mostrar que en el resto de Criterios de Información estos modelos también obtuvieron los mismos valores.

Figura 9:
Modelos Más Eficientes con la Metodología de Box-Jenkins para la serie de LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO



Box-Jekins	Indicadores			
	LogL	AIC*	BIC	HQ
(4,4)(2,0)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(0,2)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(1,2)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(2,2)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(2,1)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(0,0)	-2682.885	26.038	26.231	26.116
(4,4)(1,0)	-2682.885	26.038	26.231	26.116

Elaboración propia.

Así, los modelos de Box-Jenkins potenciales a ser usados serían SARIMA (4,1,4)(2,0,0)₁₂, SARIMA (4,1,4)(0,0,2)₁₂, SARIMA (4,1,4)(1,0,2)₁₂, SARIMA (4,1,4)(2,0,2)₁₂. En particular, el primer modelo predice un valor de 47.4 millones de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020³¹.

6.1.3 Predicción bajo Metodología de Regresiones Polinomiales³²

Para el caso de la metodología de Regresiones Polinomiales se muestran las predicciones realizadas para los cuatro primeros grados (lineal, cuadrática, cúbica y cuártica)³³. Una vez obtenidas las predicciones por cada grado, se estiman los RMSE y U-Theil, a fin de identificar la versión que permita mejores predicciones. (Ver Tabla 6).

Tabla 6:
Versión Más Eficiente para la serie LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO bajo Regresiones Polinomiales

Regresión polinomial	Indicadores	
	RMSE	U-Theil
Primer Grado o Lineal	2,520,079	0.0542
Segundo Grado o Cuadrática	2,494,616	0.0536
Tercer Grado o Cúbica	1,891,061	0.0406
Cuarto Grado o Cuártica	1,260,541	0.0270

Elaboración propia.

De acuerdo con la tabla anterior, bajo esta metodología la mejor versión para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio corresponde a la de cuarto grado (menores valores de RMSE y U-Theil que el resto de versiones)³⁴.

³¹ En el Anexo 9 se muestra el análisis gráfico de los residuos para la metodología de Box-Jenkins realizadas en EViews.

³² En el Anexo 5 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

³³ Primer grado o lineal: $y_t = a_0 + a_1 t$

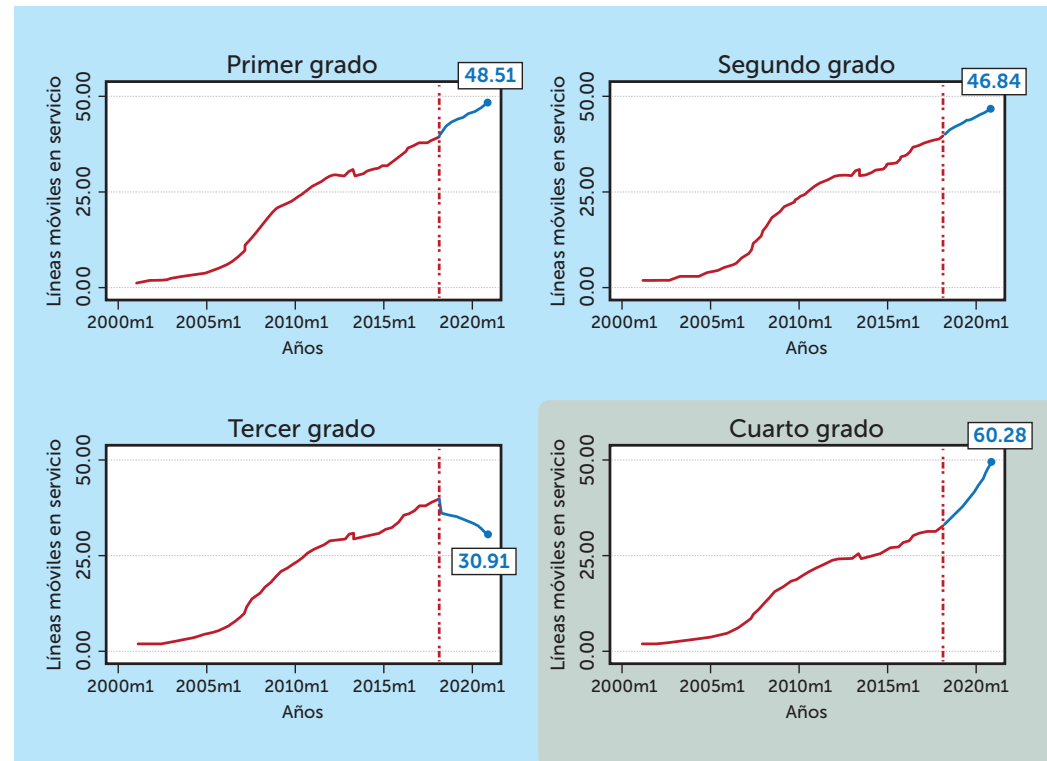
Segundo grado o cuadrática: $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

Tercer grado o cúbica: $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Cuarto grado o cuártica: $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$

³⁴ En el Anexo 7 se muestra el análisis gráfico de los residuos para esta metodología en EViews.

Figura 10:
Modelo Más Eficiente bajo la Metodología de Regresiones Polinomiales
(En Millones)



Elaboración propia.

En base a la Figura 10, la versión más idónea de la metodología Regresión Polinomial para predecir la serie de líneas móviles en servicio es la de Cuarto Grado. Así, mediante esta versión se predice que existirán alrededor de 60.3 millones de líneas móviles al cierre del 2020, cifra muy superior que la predicha por las anteriores metodologías.

6.2 Comparación de predicciones realizadas por distintas metodologías

En muchas ocasiones, las predicciones son realizadas considerando una única metodología y encontrando la mejor versión (o modelo) de predicción para una serie determinada. El problema que surge con esto es que al utilizar una única metodología no se tiene la seguridad de haber empleado la más idónea. Por tal motivo, en este documento se realizaron las predicciones considerando distintas metodologías.

Resumiendo las mejores versiones (o modelos) que se han estimado para cada una de las metodologías se tiene que:

- Bajo la metodología de Box-Jenkins, el modelo que mejor se ajustó fue el de un SARIMA $(4,1,4)(2,0,0)_{12}$. Esto es, un proceso ARIMA con componentes estacionales.
- Bajo la metodología de Suavizamiento Exponencial, la versión que más se ajusta corresponde a un Holt-Winters No Estacional.
- Con la metodología de Regresiones Polinomiales (o Tendencia determinística), se seleccionó un modelo de cuarto grado.
- Con el método de Crecimiento Promedio Compuesto, el modelo de mayor ajuste es uno asociado a una tasa de crecimiento mensual de 1.65%.

Luego de conocer las mejores versiones para cada metodología, se pueden emplear nuevamente los estadísticos RMSE y U-Theil³⁵ con el propósito de conocer cuál es la metodología (y versión) más idónea para predecir una determinada serie. Para nuestro caso, las líneas móviles en servicio al cierre del año 2020.

De este modo, la Tabla 7 muestra que –entre todas las metodologías empleadas– la metodología de Box-Jenkins es la más idónea para predecir las líneas móviles en servicio. Esto porque presenta una menor RMSE (107,403) y una menor U-Theil (0.0023). Por tanto, si se decide por considerar una única metodología para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio, esta debería ser la de Box Jenkins (en especial, un SARIMA $(4,1,4)(2,0,0)_{12}$). Como segunda opción se tiene a la metodología de Suavizamiento Exponencial (en su versión Holt-Winters No Estacional), la cual presenta un valor de RMSE y U-Theil muy cercano a la de Box-Jenkins.

Tabla 7:
Metodología Más Idónea para predecir la serie de
LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

Metodología empleada	Indicadores	
	RMSE	U de Theil
Box-Jenkins (ARIMA)	107,403	0.0023
Suavizamiento Exponencial	195,855	0.0042
Regresión Polinomial	1,260,541	0.0270

Elaboración propia.

Adicionalmente, la siguiente figura muestra la evolución de la serie proyectada de líneas móviles en servicio con distintas metodologías.

³⁵ Si bien se mencionó que en el caso de Box-Jenkins los criterios de información son los mejores estadísticos de decisión. Para comparar entre metodologías se tuvo que calcular el RMSE y el U-Theil.

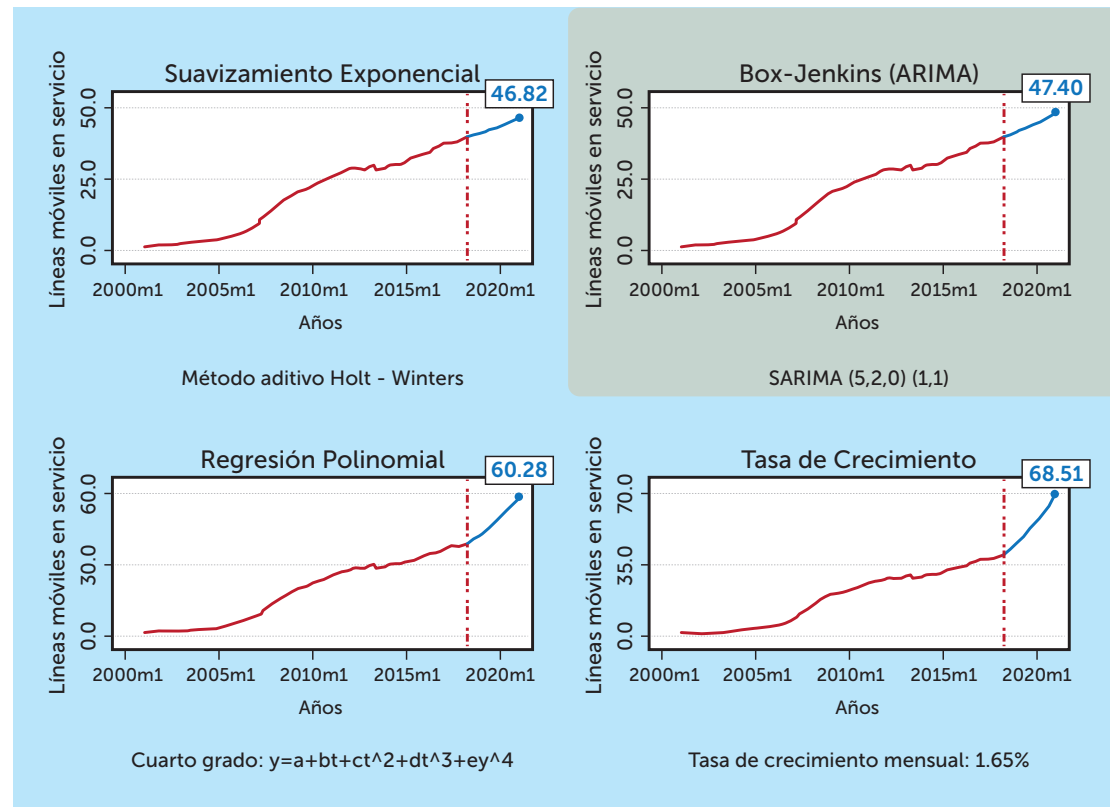
Las metodologías menos precisas para predecir serían la de Regresiones Polinomiales y la de Tasa de Crecimiento Compuesta. Estas metodologías predicen un valor de 60.3 millones y 68.5 millones de líneas al cierre del 2020, respectivamente. Estos resultados son consistentes con los altos valores de RMSE y U-Theil, los cuales se encuentran muy por encima de sus similares obtenidos para las metodologías de Box-Jenkins y Suavizamiento Exponencial

Por los resultados mostrados en la tabla anterior, la figura sombreada es la que describiría la mejor predicción de las líneas móviles en servicio al cierre 2020 (metodología de Box-Jenkins).

Por tanto, en un análisis preliminar podría mencionarse que de acuerdo con los resultados obtenidos, se espera que –al cierre del año 2020– el número de líneas móviles en servicio alcance un total de 47.4 millones de líneas.

Figura 11:

Comparación de Predicciones del NÚMERO DE LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO con distintas metodologías (En Millones)



Elaboración propia.

No obstante, si bien esta metodología es la más idónea para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio, es necesario mencionar que la predicción podría aún ser mejorada si se considera una combinación de metodologías.

La idea detrás de esto es que debe considerarse que cada metodología de predicción trata la serie histórica de manera distinta y extrae diferente información del conjunto (o potencial) de información que brinda la serie histórica. Por tanto, puede suponerse que el uso de dos o más metodologías ofrecería mayor información.

En ese sentido, qué impulsaría a elegir una única metodología de predicción, cuando combinando más de una metodología podría obtenerse un mayor ajuste de los datos respecto a la serie histórica y, de esta forma, contar con predicciones más robustas. Esto se verá en la siguiente sección, en donde se aplicará -de ser posible- la combinación de metodologías de predicción para las series de líneas móviles en servicio.

6.3 Aplicación del Test de Diebold y Mariano

El Test de Diebold y Mariano permite probar si la combinación de dos o más metodologías de predicción es más idónea (predicción más robusta) que el uso de la mejor metodología de predicción de manera individual. Para considerar si es necesaria una combinación de metodologías de predicción, estas son tomadas dos a dos, para finalmente comprobar si una combinación de las tres metodologías es aún más eficiente.

Para cada una de las combinaciones de predicciones se realiza el test de Diebold y Mariano. En este caso la prueba de hipótesis sería la siguiente:

$$H_0: \alpha_{MCO} = 0 \dots \text{NO combinación de Metodologías}$$

$$H_1: \alpha_{MCO} \neq 0 \dots \text{SI combinación de Metodologías}$$

Adicionalmente, como se especificó anteriormente, en caso de que el Test de Diebold y Mariano recomiende una combinación de metodologías de predicción, es de esperar que en cualquier combinación de predicciones se le asocie una mayor ponderación a las metodologías más eficientes y una menor ponderación a las metodologías menos eficientes.

La siguiente tabla muestra un resumen de los principales estadísticos derivados de las regresiones MCO realizadas para estimar los ponderadores que se le asigna a cada metodología dentro de la combinación lineal de metodologías (α).

Tabla 8:
Comparación de Combinaciones de Metodologías de Predicción del número de LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

Predicciones combinadas	Coefficientes (ponderadores)	t	p. value (t)	F	p. value (F)
Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales	$\alpha_{ARIMA} = 0.983$	168.067	0.0000	28,246.63	0.0000
Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales	$\alpha_{exponencial} = 0.962$	94.113	0.0000	8,857.17	0.0000

Elaboración propia.

La tabla anterior muestra que los p -value asociados a los ponderadores de cualquiera de las predicciones combinadas se encuentran por debajo de 0.05 (ver cuarta columna de la tabla), por lo que se asume que estos son significativos (con lo que se rechaza la hipótesis nula de que $\alpha_{MCO} = 0$). Por tanto, esto sugiere que debe realizarse una combinación de metodologías de predicción.

La tabla anterior muestra que para el caso analizado sobre líneas móviles en servicio se tiene que:

- En una combinación de predicciones de Box-Jenkins y Regresiones Polinomiales se le otorgarían ponderaciones de 0.983 y 0.017, respectivamente.
- En una combinación de predicciones de Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales se le otorgarían ponderaciones de 0.962 y 0.038, respectivamente.

Sobre las ponderaciones asignadas a cada una de las metodologías para este caso específico se deduce que:

- La metodología Box-Jenkins es superior estadísticamente a la de Suavizamiento Exponencial. Esto es consistente con los resultados obtenidos en las predicciones individuales.
- Pese a haber tratado a la metodología de Regresiones Polinomiales como una metodología ineficiente para predecir las líneas móviles en servicio de manera individual, la metodología le otorga una ponderación -por más pequeña que sea- para realizar una mejor predicción bajo la combinación de metodologías³⁶.

Es necesario tener en cuenta que en la tabla mostrada no se incluye la combinación entre las metodologías de Box-Jenkins y Suavizamiento Exponencial ni la combinación entre las metodologías Box-Jenkins, Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales, por el simple hecho de que -al parecer- la información extraída por la metodología de Suavizamiento Exponencial -en este caso- estaría contenida en la información extraída por la metodología de Box-Jenkins, algo que difícilmente sucede.

³⁶ Nuevamente, esto se debe a que la información que extrae esta metodología de la serie histórica, no la extrae ninguna de las otras dos metodologías (denominadas eficientes).



7 COMBINACIÓN DE METODOLOGÍAS DE PREDICCIÓN

De acuerdo con la literatura, Diebold y Lopez (1996), Newbold y Harvey (2002) sostienen que a menudo se ha encontrado que la combinación de predicciones individuales del mismo evento supera a las predicciones individuales, en el sentido de que la predicción combinada arroja un error de pronóstico medio cuadrático más pequeño.

Por su parte, Clemen (1989) señala que, según la evidencia empírica, la combinación de predicciones múltiples lleva a una mayor precisión de la predicción. Así, en muchos casos uno puede hacer mejoras dramáticas en el rendimiento simplemente promediando las predicciones.

Los resultados mostrados también son consistentes con lo señalado por Granger (1969):

"si el objetivo es hacer una buena predicción, no es buen procedimiento descartar predicciones, ya que casi siempre contiene información útil e independiente"³⁷.

Como se mencionó en la sección 6, para el caso de las líneas móviles en servicio, la información extraída por la metodología de Box-Jenkins ya estaría contenida en la información extraída por la metodología de Suavizamiento Exponencial. Por tanto, las únicas combinaciones de metodologías que tendrían sentido ser efectuadas son las que se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9:
Combinación Más Idónea para predecir los valores de la serie de LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

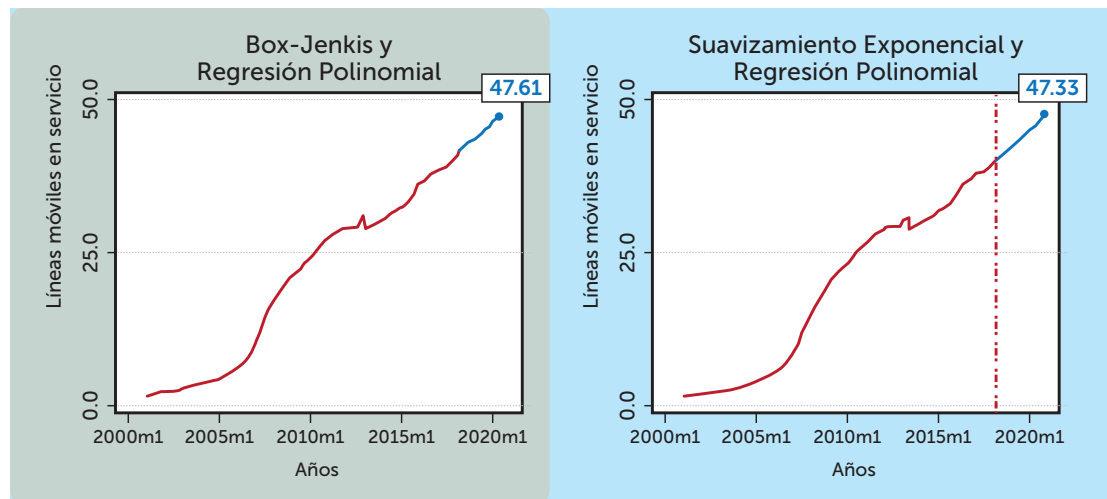
Predicciones combinadas	Indicadores	
	RMSE	U-Theil
Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales	105,303.2	0.00225
Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales	189,591.1	0.00407

Elaboración propia.

³⁷ Asimismo, menciona que esta información independiente puede ser de dos tipos: (i) una predicción se basa en variables o información que la otra predicción no ha considerado, (ii) cada metodología de predicción hace una suposición diferente sobre la forma de la relación entre las variables.

Finalmente, la figura a continuación muestra la evolución de la serie de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020, bajo ambas combinaciones de metodologías de predicción. En particular, sobre la base de los estadísticos de decisión, la figura sombreada muestra que la combinación de las metodologías de predicción (Box-Jenkins y Regresiones Polinomiales) arroja resultados más precisos que cualquier otra predicción (individual o combinada). Así, al cierre del año 2020, se estaría alcanzando un total de 47.6 millones de líneas en servicio.

Figura 12:
Evolución con distintas combinaciones de metodologías de predicción
(De acuerdo con la Prueba de Diebold y Mariano)
(En Millones)



Elaboración propia.

8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El sector de las telecomunicaciones se caracteriza por ser muy dinámico, tanto por la intensidad competitiva que ejercen las empresas operadoras como por la aparición de nuevas tecnologías sobre las que se brindan los servicios. En ese sentido es frecuente que –para algunos servicios– se necesite realizar predicciones sobre indicadores relevantes a fin de anticipar su tendencia y sus valores futuros.

Es por dicha necesidad que el presente documento pretende ser una referencia al momento de realizar predicciones sobre la evolución de indicadores univariados. Para ello se presentó el tratamiento previo que debe ejecutarse sobre la serie histórica, con el propósito de realizar predicciones siguiendo distintas metodologías (Suavizamiento Exponencial, Box-Jenkins, Regresiones Polinomiales y Crecimiento Promedio).

De este modo, y con la serie de líneas móviles en servicio, se seleccionó la mejor versión (o modelo) de cada metodología –de manera individual– para predecir su evolución hasta el cierre del 2020. De acuerdo con estadísticos de decisión (RMSE y U-Theil), se observó que la mejor metodología para predecir dicha serie fue la de Box-Jenkins, seguido de Suavizamiento Exponencial y, muy lejanamente la metodología de Regresiones Polinomiales.

No obstante, lo novedoso de este documento es que se pueden obtener predicciones mucho más precisas si se considera no solo la mejor opción (de una metodología individual), sino una combinación de las mejores opciones bajo diferentes metodologías. Tal como se especificó en el documento, la literatura econométrica señala claramente que la combinación de metodologías arroja mejores predicciones que las obtenidas a través de metodologías individuales.

A pesar de que el presente documento (así como la literatura econométrica reciente) considera que la combinación de metodologías de predicción resulta de gran importancia, se debe de tener en cuenta lo siguiente:

- Si la información extraída de la serie por parte de una metodología de predicción está contenida dentro de la información extraída por otra metodología, la combinación de estas metodologías sería trivial, y el análisis realizado llevaría a utilizar aquella metodología que extraiga la mayor cantidad de información de la serie histórica, en combinación con otras metodologías. Sin embargo, basta que otra metodología considere información adicional, para que la combinación sea posible. Esto es, lo que sucedió en el caso de la predicción del número de líneas móviles en servicio.
- Si bien una metodología de predicción podría no ser muy precisa para pronosticar los valores futuros de algún indicador (como sucedió con Regresiones Polinomiales en las predicciones del número de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga), esta no debería de ser descartada porque es muy probable que extraiga información que el resto de metodologías no haya extraído y, por tanto contribuir con la predicción.

La siguiente tabla muestra que la combinación de metodologías es una mejor opción que el uso de metodologías de manera individual (menores valores de RMSE y U-Theil). Así, se espera que al cierre del año 2020 se cuente con 47.6 millones de líneas móviles en servicio, cifra cercana a la de Box –Jenkins individual. Esto es consistente porque no se considera a la metodología de Suavizamiento Exponencial (al parecer extrae la misma información que la de Box-Jenkins) y al hecho de que a las metodologías con predicciones más eficientes se les asigne mayores ponderadores al momento de realizar la combinación de metodologías.

Tabla 10:
Combinación Más Idónea para predecir los valores de la serie de
LÍNEAS MÓVILES EN SERVICIO

¿Individual o Combinada?	Metodología	Versión	Indicadores		Pronóstico (millones)
			RMSE	U-Theil	
Combinada	Box-Jenkins + Regresión Polinomial	SARIMA (4,1,4) (2,0,0) ₁₂ Cuarto grado	105,303	0.0023	47.61
Individual	Regresiones Polinomiales	Cuarto grado	1,260,541	0.0270	60.28
	Suavizamiento Exponencial	Holt-Winters No Estacional	195,855	0,0042	46.82
	Box-Jenkins (ARIMA)	SARIMA (4,1,4)(2,0,0) ₁₂	107,403	0.0023	47.40

Elaboración propia.

Por tanto, se recomienda que:

- En base al caso aplicado en el presente documento y a los avances en las técnicas de predicción, se debe evaluar no solo la metodología más idónea para una determinada serie, sino las distintas combinaciones en las metodologías de predicción. Es muy probable que estas últimas arrojen resultados más precisos.
- Lo mencionado en el párrafo precedente ya no es un proceso complicado, pues varios de los programas informáticos -como Risk Simulator y EViews- incluyen como herramienta una versión automática para encontrar las mejores predicciones para cada metodología. No obstante, lo que aún no se incluye de manera automática es la opción de comparar si una combinación de metodologías arroja resultados más precisos que la mejor opción individual. Aunque, esto último puede realizarse según lo explicado en el documento.
- No existe una metodología de predicción superior a otra. La aplicación de una u otra metodología depende de la cantidad de datos con los que cuente la serie y de la forma de su evolución. Así, cuando se cuente con pocos datos históricos, no es posible esperar predicciones precisas empleando la metodología de Box-Jenkins, pero sí empleando Suavizamiento Exponencial³⁸. Luego, respecto a la forma de la evolución de la serie, se recomienda siempre recurrir al paquete informático, a fin de evaluar todos los casos posibles.
- Aunque la mejor versión dentro de una metodología arroje un valor alto de RMSE y U-Theil (en comparación a otras metodologías), es muy probable que en la combinación de metodologías esta no sea descartada porque recoge información que el resto de metodologías no capturó. Esto pudo verse en la predicción de líneas móviles en servicio mediante Regresiones Polinomiales.
- A pesar de que en otras investigaciones como Granger y Newbold (1975), Makridakis y Hibon (1978) Winkler y Makridakis (1983) sugieren que las metodologías deben ser ponderadas a través de un promedio simple debido a la complejidad de encontrar los ponderadores, el caso práctico realizado en este documento -a través del empleo de software- demuestra que la importancia que tiene cada metodología particular depende del ajuste que esta tenga sobre los datos históricos analizados.

³⁸ Incluso, el mismo paquete informático arroja una advertencia de que se requiere de más datos con Box-Jenkins, lo cual no sucede con otras metodologías como Suavizamiento Exponencial.

BIBLIOGRAFÍA

Andersen, A., & Weiss, A. (1984). "Forecasting: The Box-Jenkins Approach". England.

Armstrong, J. (1978). "Forecasting with Econometric Methods: Folklore versus Fact with Discussion". *Journal of Business* 51, 549-600.
Disponible en: goo.gl/v6HzVE

Bates J. & Granger C. (1969). "The Combination of Forecast". Disponible en: goo.gl/BJtXCL

Billah, B., King, M., Snyder, R. & Koehler, A. (2006). "Exponential smoothing model selection for forecasting". *International Journal of Forecasting*.

Box, G. & Jenkins, G. (1970). "Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco". San Francisco.

Box, G. & Pierce, D. (1973). "Distribution of the Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving-Average Time Series Models". *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509-1526.

Brown, R. (1959). "Statistical Forecasting for Inventory Control". McGraw-Hill.

Brown, R. (1963). "Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series". Prentice-Hall.

Chatfield, C. (1989). "The Analysis of Time Series: An Introduction". Chapman and Hall, London, 4th edition.

Cogger, K. (1974). "The Optimality of General-Order Exponential Smoothing". *Operations Research*, 22, 858-867.

Cohen, G. (1963). "A note on exponential smoothing and autocorrelated inputs". *Operations Research*, 2, 361-367.

Czajkowski, M. & Sobolewski, M. (2016). "Estimating call externalities in mobile telephony". Disponible en: goo.gl/CLWjZr

Department of Justice (2015). "Herfindahl-Hirschman Index". Disponible en: <https://www.justice.gov/aatr/herfindahl-hirschman-index>

Diebold, F. & Mariano, R. (1995). "Comparing predictive accuracy". *Journal of Business & Economic Statistics*, vol.13, No. 3

Enders, W. (2010). "Applied Econometric Time Series". 3rd ed. Hoboken, NJ: Jhon Willey.

Greene, W. (2002). "Econometric Analysis". 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Hendry D. & Clements M. (2001). "Pooling of Forecast". *Econometrics Journal*, volume 7, pp.1-31.

Kirchgassner, G. (2013). "Introduction to modern time series analysis".

Hamilton, J. (1994). "Time Series Analysis". Princeton University Press, Princeton.

Harvey, A. (1993). "Time series models". Cambridge, MA : The MIT Press, 1993.

Liese, F., & Miescke, K. (2008), "Statistical decision theory: Estimation, testing, and selection". Springer.

Loayza, R., & Jáuregui, S. (2015). "Evolución del Mercado de Telecomunicaciones Móviles en el Perú". Disponible en: goo.gl/8E6FZV

Jiménez, J. (2006). "La capacidad predictiva en los métodos Box – Jenkis y Holt-Wintes: una aplicación al sector turístico". Universidad de Almería.

Madsen, H. (1955). "Time Series Analysis".

Makridakis, S., & Hibon, M. (1979). "Accuracy of Forecasting: An Empirical Investigation", (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 142, Part 2, pp. 79-145.

Makridakis, S., et al., (1982). "The Accuracy of Extrapolative (Time Series Methods): Results of a Forecasting Competitio". *Journal of Forecasting*, Vol. 1, No. 2, pp. 111-153.

Makridakis, S., Wheelwright, S., & McGee, V. (1983). "Forecasting Methods and Applications (2nd Edition)". Wiley and Sons, New York.

Makridakis, S. et al. (1993). "The M2-Competition: A Real-Time Judgmentally-Based Forecasting Study". *International Journal of Forecasting*, Vol. 9, No. 1, pp. 5-23.

Marquart, W. (1963). "An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters". *Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 431-441.

Márquez, L., Hill, T., Worthley, R. & Remus, W. (1991). "Neural network models as an alternative to regression". *Proceedings of the 24th Annual Hawaii International Conference on System Sciences*, 4, 129-135.

Martín del Brío, B. & Sanz, M. (2006). "Redes neuronales y sistemas difusos".

McWhorter, A. (1975). "Time Series Forecasting Using the Kalman Filter: An Empirical Study". Business and Economics Section, pp. 436-446.

Nelson, C. & Plosser, C. (1982). "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series". Journal of Monetary Economics 10 (1982) 139-162. NorthHolland Publishing Company.

Newton, H. & Parzen, E. (1984). "Forecasting and Time Series Model Types of 111 Economic Time Series". Disponible en: goo.gl/RWYVi3

Parzen, E. (1982). "ARARMA Models for Time Series Analysis and Forecasting". Journal of Forecasting, 1, pp. 67-82.

Santemases, M. (2005). "Dyane. Versión 3: Diseño y análisis de encuestas en investigación social y de mercados". Ediciones Pirámide.

Sujarittanonta, P. (2017). "Evaluating mobile number portability policy in the Thai mobile telecommunications market". Disponible en: goo.gl/kJNKPd

Shuchum, W. (2006). "Exponential Smoothing for Forecasting and Bayesian Validation of Computer Models". Georgia Institute Technology.

Timmermann, A. (2005). "Forecast Combinations". University of California San Diego.

Warner, M. (1998). "Spectral analysis of time-series data".

White, H. (2014). "Economic Prediction Using Neural Networks: The Case of IBM Daily Stock Returns".

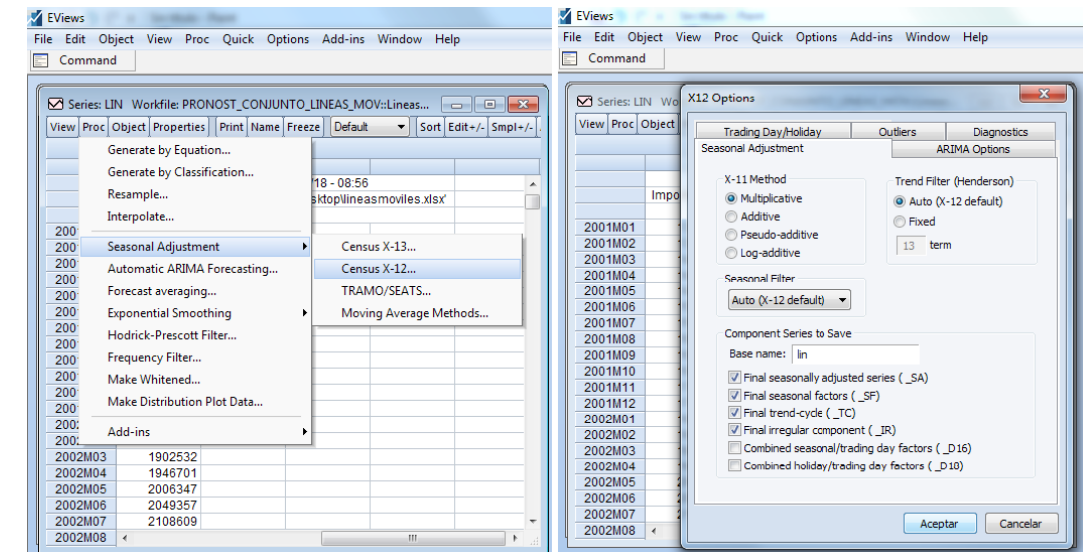
Wilson, P.; Okunev, J; Ellis, C. & Higgins, D. (2000). "Comparing Univariate Forecasting Techniques in Property Markets". Journal of Real Estate Portfolio Management, vol 6, núm. 3, pp. 283-306.

Witt, S. & Witt, C. (1995). "Forecasting Tourism Demand: A Review Empirical Research". International Journal of Forecasting, vol. 20, núm 1, pp. 447-475.

Zivot, E. & Andrews, D. (1992). "Further Evidence on the Great Crash, the Oil –Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis". Journal of Business Economic Statistic, Vol. 10, No 3, pp. 251-270.

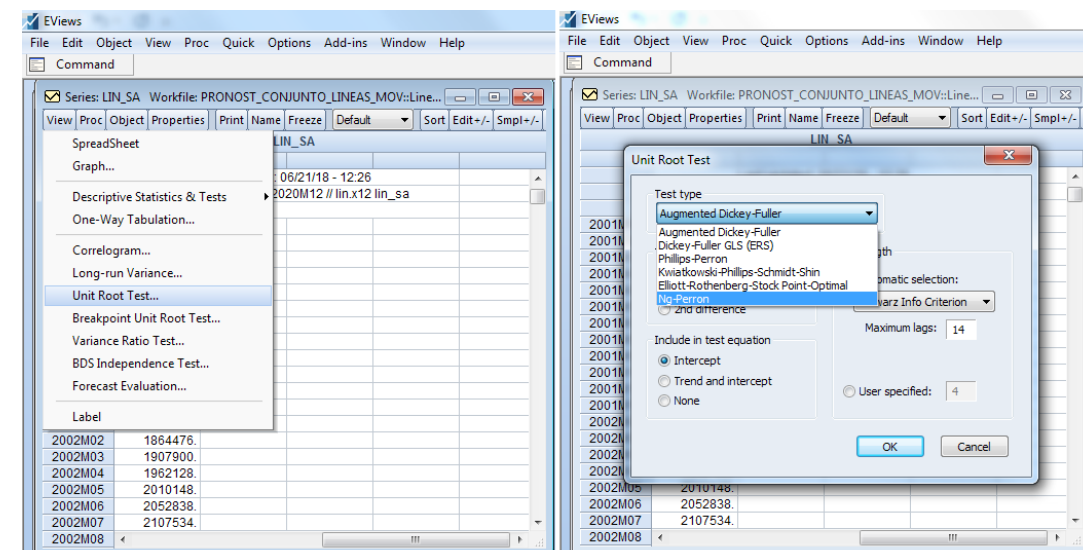
ANEXOS

ANEXO 1 SECUENCIA DE DESESTACIONALIZACIÓN DE UNA SERIE TEMPORAL (EViews).



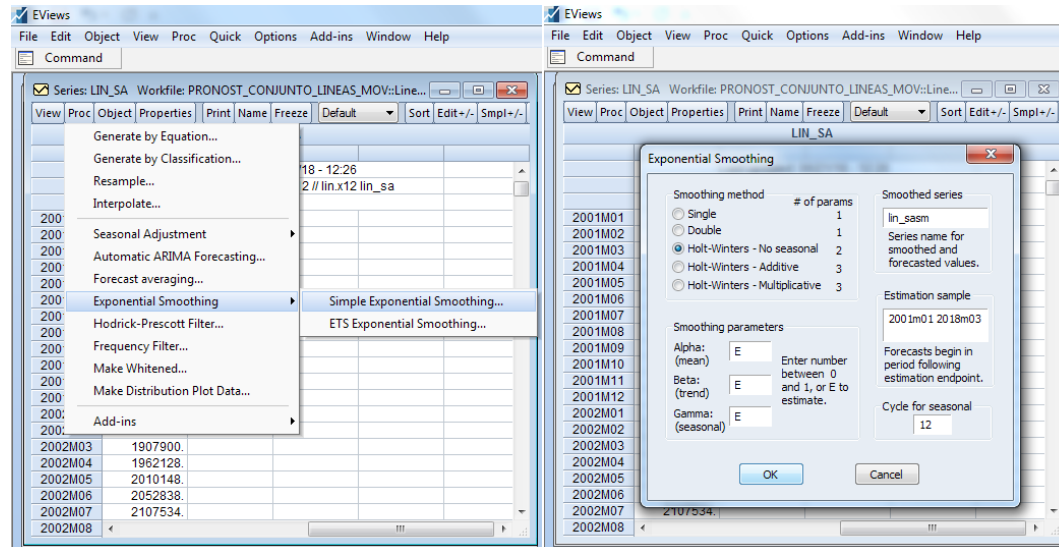
Elaboración propia.

ANEXO 2 SECUENCIA DE DETECCIÓN DE ESTACIONARIEDAD DE UNA SERIE TEMPORAL (EViews).



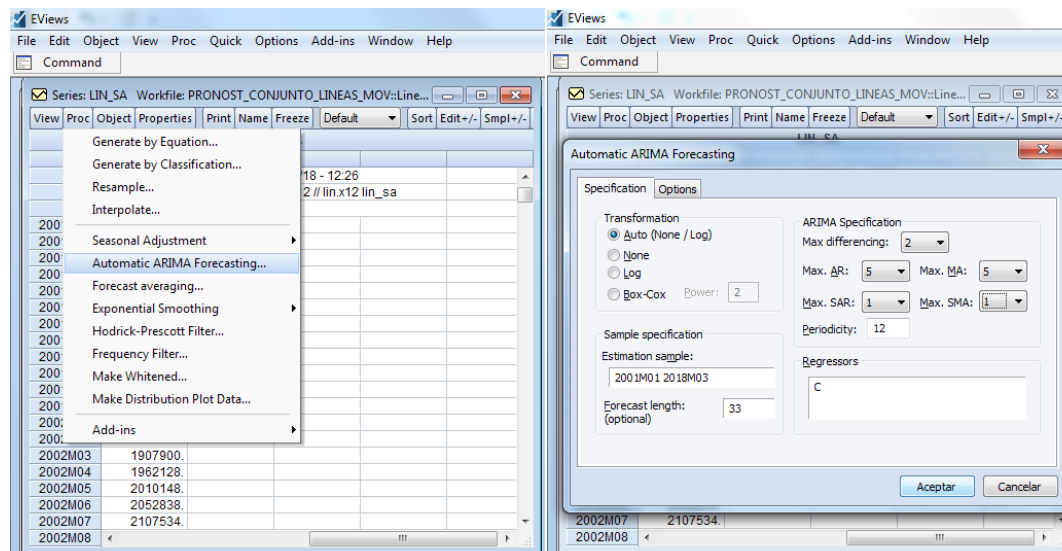
Elaboración propia.

ANEXO 3
SECUENCIA PARA REALIZACIÓN DE PREDICCIÓN DE
SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL (EViews).



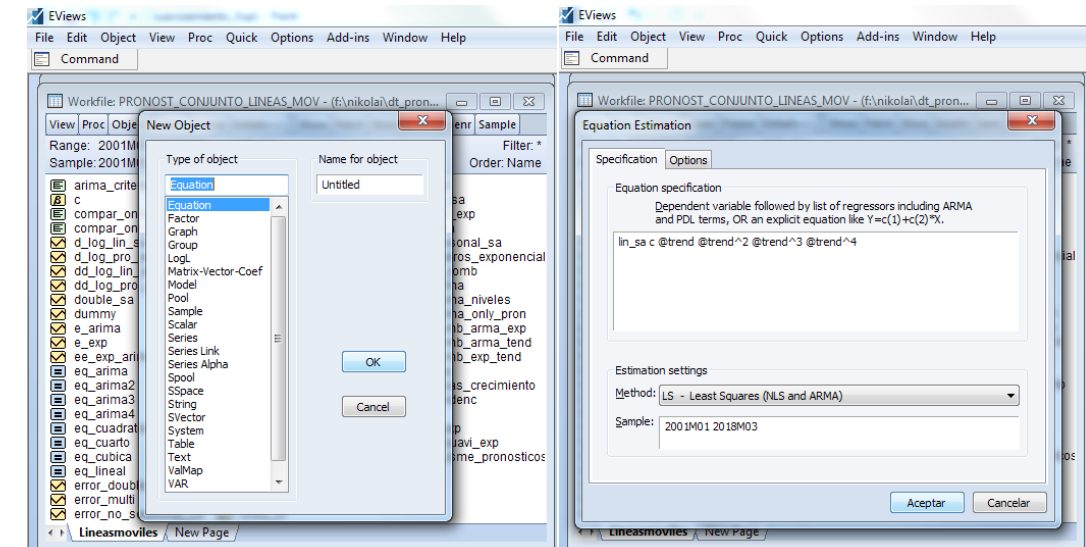
Elaboración propia.

ANEXO 4
SECUENCIA PARA REALIZACIÓN DE PREDICCIÓN POR BOX-JENKINS
(EViews).



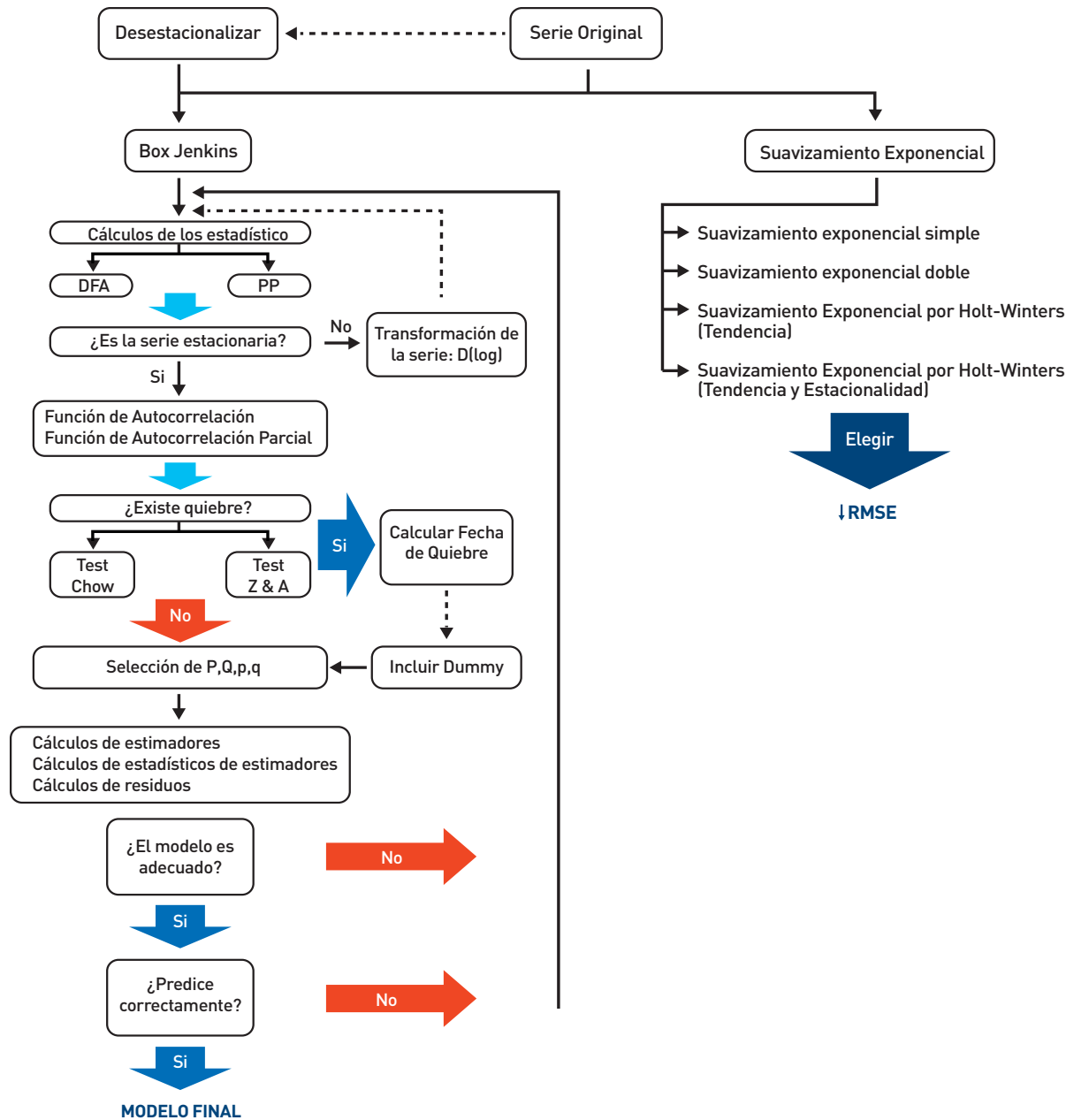
Elaboración propia.

ANEXO 5
SECUENCIA PARA REALIZACIÓN DE PREDICCIÓN POR REGRESIONES
POLINOMIALES (EViews).



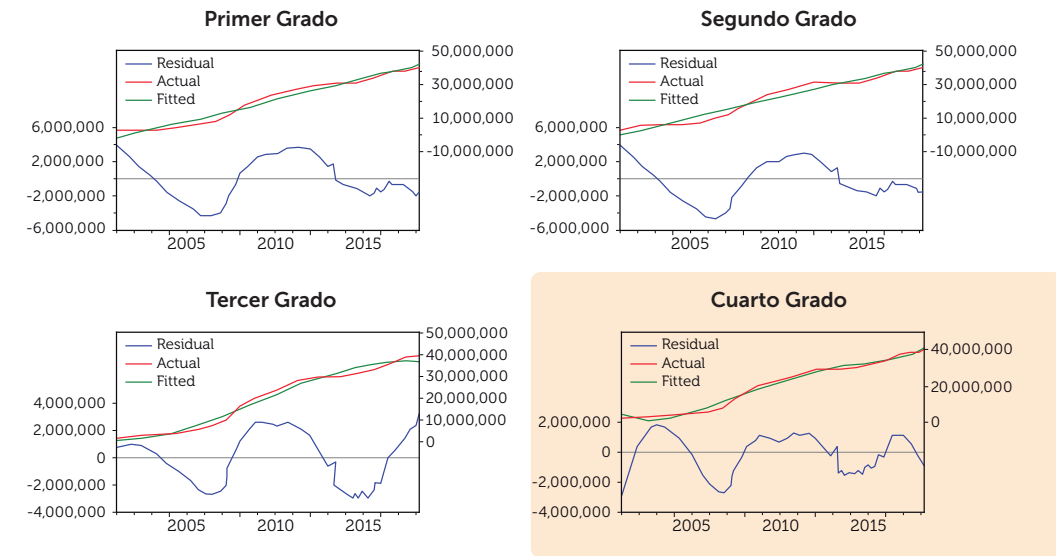
Elaboración propia.

ANEXO 6
SECUENCIA DE ANÁLISIS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE BOX JENKINS



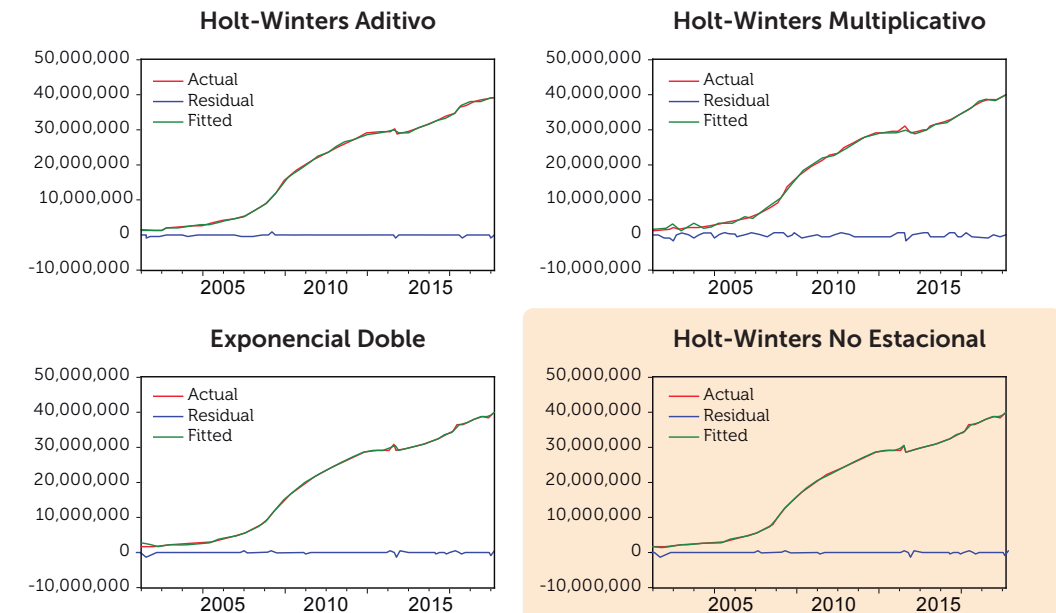
Elaboración propia.

ANEXO 7
ANÁLISIS DE LOS RESIDUOS BAJO LA METODOLOGÍA DE REGRESIONES POLINOMIALES



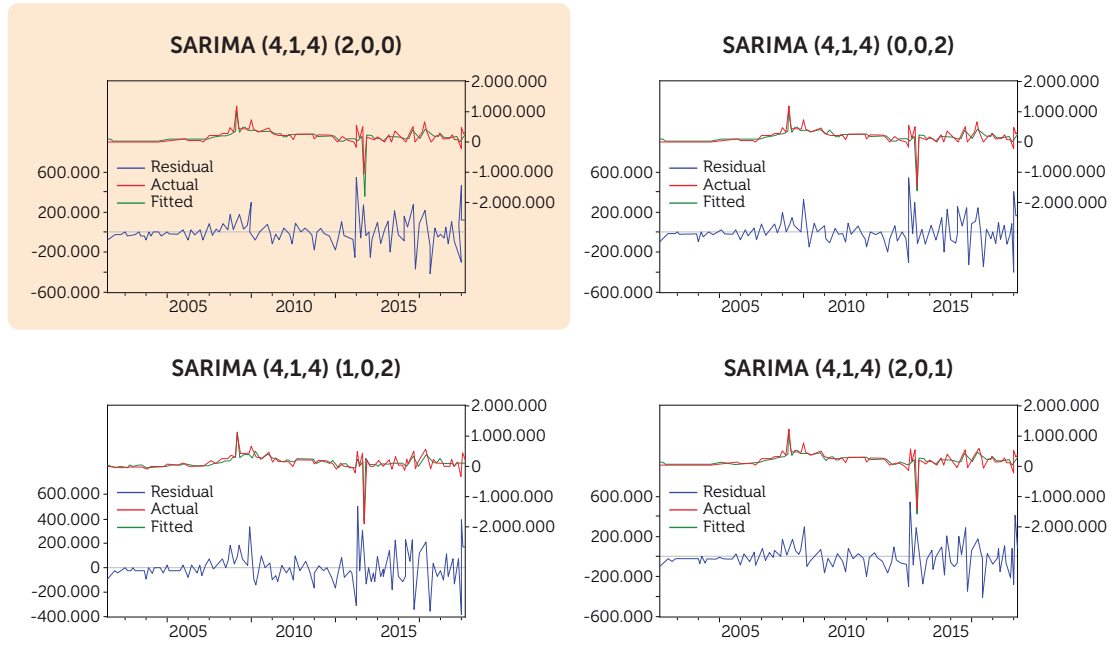
Elaboración propia.

ANEXO 8
ANÁLISIS DE LOS RESIDUOS BAJO LA METODOLOGÍA DE SUAVIZAMIENTO EXPONENCIAL



Elaboración propia.

ANEXO 9
ANÁLISIS DE LOS RESIDUOS BAJO LA METODOLOGÍA DE BOX-JENKINS
(PROCESOS ARIMA)



Elaboración propia.



www.osiptel.gob.pe