

Identificando técnicas de predicción univariadas para el sector de las telecomunicaciones: *Un acercamiento al Test de Diebold-Mariano y la combinación de metodologías de predicción*

Manuel Gavilano Aspillaga*

*Gerencia de Políticas Regulatorias y Competencia
Subgerencia de Evaluación y Políticas de Competencia || OSIPTEL*

Resumen

Este documento busca ser una guía para el OSIPTEL cuando se requiera realizar predicciones sobre valores futuros en los indicadores relevantes del sector de las telecomunicaciones. Para ello, se muestran las metodologías más comunes como: *Modelos de Box-Jenkins, Modelos de Suavizamiento Exponencial, Modelos de Regresiones Polinomiales y Modelos de Crecimiento Promedio Compuesto.*

Adicionalmente, como en muchas ocasiones suele suceder, distintos organismos predicen diferentes valores para un mismo indicador (incluso, considerando los mismos datos históricos). Esto sucede simplemente porque escogieron distintas metodologías de predicción. Pero, *¿cuál es la mejor predicción? ¿Existe una metodología que sea superior a otras?* En términos generales, la respuesta es NO. Cada metodología trata de manera diferente y, por ende, recoge diferente información de los datos históricos para realizar predicciones.

En ese sentido, lo novedoso de este documento es demostrar (tal como lo señalan los estudios recientes) que las predicciones más idóneas provienen de una combinación de metodologías más que del uso de una única metodología. Para ello, se recurre al Test de Diebold y Mariano, a fin de corroborar si la combinación de metodologías arrojaría predicciones más eficientes que una única metodología.

Como aplicación, se realiza predicciones sobre los indicadores de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga al cierre del año 2020. De acuerdo a los resultados, la mejor metodología (individual) para ambos indicadores es la de Box-Jenkins y, por tanto, es la que se escogería para realizar predicciones. Sin embargo, cualquier combinación de metodologías (Box-Jenkins - Suavizamiento Exponencial - Regresiones Polinomiales) es mucho más idónea porque se ajustaría más a los datos históricos. Este documento muestra de manera detallada estos resultados.

© 2018 OSIPTEL. Derechos reservados.
www.osiptel.gob.pe

*Se agradece la colaboración de Rosa Castillo y Nikolai Tovar por sus aportes en la elaboración de este documento. Las opiniones vertidas en él son de responsabilidad exclusiva del autor, y no reflejan necesariamente la posición del OSIPTEL hasta la emisión de la respectiva posición oficial, de ser el caso. Remitir comentarios y sugerencias a: mgavilano@osiptel.gob.pe

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 4 |
| 2. Estado actual del mercado móvil y televisión de paga | 6 |
| 2.1. Líneas móviles, participación de mercado y penetración | 6 |
| 2.2. Concentración del mercado | 7 |
| 2.3. Número de teléfonos móviles efectivamente portados | 8 |
| 2.4. Número de suscripciones de televisión de paga | 8 |
| 3. Tratamiento previo de la serie | 9 |
| 3.1. Estacionalidad | 9 |
| 3.2. Estacionariedad | 13 |
| 4. Metodología de predicciones | 15 |
| 4.1. Metodología de Box-Jenkins | 16 |
| 4.1.1. Proceso Autorregresivo: $AR(p)$ | 16 |
| 4.1.2. Proceso de Medias Móviles: $MA(q)$ | 17 |
| 4.1.3. Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles $ARIMA$ (p,d,q) | 17 |
| 4.1.4. Modelo Autorregresivo Estacional Integrado de Medias Móviles | 18 |
| 4.2. Metodología sobre Suavizamiento Exponencial | 18 |
| 4.2.1. Suavizamiento Exponencial Simple | 19 |
| 4.2.2. Suavizamiento Exponencial Doble o Versión de Holt | 19 |
| 4.2.3. Versión Holt-Winters Multiplicativo | 19 |
| 4.2.4. Versión Holt-Winters Aditivo | 20 |
| 4.2.5. Versión Holt-Winters No-Estacional | 20 |
| 4.2.6. Suavizamiento Exponencial Cuadrático o Versión de Brow . . | 21 |
| 4.3. Metodología sobre Regresiones Polinomiales | 21 |
| 4.4. Metodología sobre Tasa de Crecimiento Promedio Compuesta | 22 |
| 5. Test de Diebold y Mariano | 23 |
| 5.1. Para predicciones empleando combinación de dos metodologías . . . | 24 |
| 5.2. Para predicciones empleando combinación de tres metodologías . . . | 25 |
| 6. Aplicación y resultados sobre predicciones | 26 |
| 6.1. Predicciones a partir de distintas metodologías de manera individual | 26 |
| 6.1.1. Predicción bajo Metodología de Suavizamiento Exponencial . | 26 |
| 6.1.2. Predicción bajo Metodología de Box-Jenkins | 28 |
| 6.1.3. Predicción bajo Metodología de Regresiones Polinomiales . . | 29 |
| 6.2. Comparación de predicciones realizadas por distintas metodologías . | 30 |
| 6.3. Aplicación del Test de Diebold y Mariano | 32 |
| 6.3.1. Respecto a la serie de líneas móviles en servicio | 32 |
| 6.3.2. Respecto a la serie de suscripciones de televisión de paga . . | 34 |

| | |
|--|-----------|
| 7. Combinación de metodologías de predicción | 35 |
| 7.1. Para la serie de <u>líneas móviles en servicio</u> | 35 |
| 7.2. Para la serie de <u>suscripciones de televisión de paga</u> | 36 |
| 8. Conclusiones y recomendaciones | 38 |
| Bibliografía | 41 |
| Anexos | 44 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| 1. Evolución del número de líneas móviles y penetración del servicio (Ene. 2006 - Mar. 2018) | 6 |
| 2. Evolución del Índice de Concentración del Servicio - HHI (Ene. 2006 - Mar. 2018) | 7 |
| 3. Evolución de líneas móviles en servicio efectivamente portadas (en términos netos), a nivel de empresa operadora (julio. 2014 – mayo 2018) | 8 |
| 4. Evolución del número de suscripciones de televisión de paga y participación de mercado (enero 2014 – marzo 2018) | 9 |
| 5. Dispersión promedio - desviación estándar de las series históricas . . | 11 |
| 6. Descomposición de la evolución de las series históricas | 12 |
| 7. Primera diferencia del logaritmo de las series históricas | 15 |
| 8. Extracción de información sobre la base de las metodologías de predicción (Base para la prueba de Diebold y Mariano) | 23 |
| 9. Predicciones para <i>líneas móviles en servicio</i> bajo la <u>Metodología de Suavizamiento Exponencial</u> (En Millones) | 27 |
| 10. Modelos <u>Más Idóneos</u> para predecir <i>líneas móviles en servicio</i> bajo la <u>Metodología de Box-Jenkins</u> | 28 |
| 11. Predicciones para <i>líneas móviles en servicio</i> bajo la <u>Metodología de Regresiones Polinomiales</u> (En Millones) | 29 |
| 12. Comparación de Predicciones del número de <i>líneas móviles en servicio</i> bajo distintas metodologías (En Millones) | 31 |
| 13. Evolución de las líneas móviles en servicio por distintas combinaciones de metodologías (según Diebold-Mariano) (En Millones de líneas) . . | 36 |
| 14. Evolución de suscripciones de televisión de paga por distintas combinaciones de metodologías (según Diebold-Mariano) (En Millones de suscripciones) | 37 |

1. Introducción

El OSIPTEL, entre sus labores, tiene la responsabilidad de promover y proteger la dinámica competitiva en los distintos mercados de servicios públicos de telecomunicaciones. Para cumplir con dicho objetivo, evalúa constantemente formas de diseñar e implementar políticas que incrementen la intensidad competitiva con el fin último de mejorar los niveles de bienestar en los usuarios.

De esta forma, el OSIPTEL -en muchas ocasiones- requiere anticipar o predecir los posibles escenarios que podrían ocurrir en los distintos servicios, a fin de estimular o intensificar la dinámica competitiva, sobre todo en aquellos servicios que están sujetos a cambios constantes (por ejemplo, el mercado de telefonía móvil).

En ese sentido, con el objetivo de identificar las metodologías más idóneas para predecir valores futuros sobre indicadores correspondientes al sector, se desarrolla aquí un breve marco teórico sobre las principales metodologías, así como su aplicación sobre el indicador de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga.

La clasificación de las metodologías de predicción suele realizarse considerando la cantidad de variables que se pretende predecir. En el caso del sector de las telecomunicaciones, los indicadores utilizados corresponden a series univariadas¹ (por ej. *tráfico, líneas o suscripciones en servicio, inversiones, ARPU, tarifa implícita, número de portaciones*). Por tanto, se utilizan metodologías como *Modelos de Box-Jenkins* (o procesos ARIMA), *Modelos de Suavizamiento Exponencial*, *Modelos de Regresiones Polinomiales (o Tendencia Determinística)* y *Modelos de Crecimiento Promedio Compuesto*².

Por otro lado, en muchas ocasiones suele suceder que una institución estime una predicción diferente a la predicción estimada por otra institución, a pesar de tratarse de la misma variable y haberse utilizado los mismos datos históricos (incluso, para predicciones de muy corto plazo). Esto es posible porque probablemente emplearon diferentes metodologías de predicción³.

En ese sentido, es natural que surjan las siguientes preguntas: *¿Cuál es la mejor predicción para este indicador?*; *¿Qué método de predicción es más efectivo?*; o, en última instancia; *¿Con qué predicción nos quedamos al final?* Sobre estas preguntas, es preciso señalar que cada metodología trata la información de una manera diferente y, por tanto, extrae distinta información considerada –en ambos casos- como información valiosa. Luego, a pesar de que las distintas predicciones arrojen información

¹Solo en el caso de predecir un modelo que combine series univariadas podría emplearse modelos de predicción multivariado.

²En el caso de series multivariadas, se utilizan los *Modelos de Vectores Autoregresivos* (o modelos VAR) y los *modelos de Redes Neuronales Artificiales*.

³Por ejemplo, en el caso peruano, es muy frecuente que muchas veces el BCRP estime una proyección del PBI para el cierre del año distinta al nivel proyectado por el INEI o por el MEF.

valiosa, los investigadores comúnmente optan por solo una de las predicciones (sin sustento alguno o bajo algún criterio de selección). Sin embargo, es muy probable que se esté dejando a un lado información valiosa o, tal vez, la mejor predicción.

Ante esto, existe un test estadístico -de reciente uso- que permite comparar entre dos o más metodologías y -de esta manera- conocer cuál de las metodologías empleadas es la que más se ajusta a los valores que se están analizando. Incluso, la bondad de este test va mucho más allá, pues también permite -y de ser necesario recomienda- realizar una nueva regresión que combine algunas (o todas las) metodologías, asignándole una ponderación a cada metodología. De esta forma, la nueva predicción consideraría mucha más información, que de por sí, una única metodología no la hubiera considerado. Este potente test fue propuesto por **Diebold y Mariano** (1995).

En ese sentido, el desarrollo del documento consta de las siguientes secciones:

- *Una descripción rápida del mercado móvil peruano y la televisión de paga.* Esto con el objetivo de observar su evolución y poner en contexto los indicadores sobre los que se van a emplear las metodologías de predicción⁴. Así, se menciona variables como número de líneas (suscripciones), penetración y líneas portadas (Sección 2).
- *Una introducción sobre el cuerpo teórico de las principales metodologías de predicción mencionadas y el tratamiento previo que se debe realizar a la serie antes de emplear alguna de las metodologías.* (Secciones 3 y 4).
- *Un desarrollo teórico sobre la intuición que existe detrás del Test de Diebold y Mariano, a fin de ser utilizado para determinar la predicción más idónea (modelo individual más eficiente versus combinación de metodologías).* (Sección 5).
- *Se realizan predicciones sobre las series de número de líneas móviles en servicio y número de suscripciones de televisión de paga al cierre del año 2020, sobre la base de las metodologías de Box-Jenkins, Suavizamiento Exponencial, Regresiones Polinomiales y Tasas de Crecimiento Promedio Compuesta.* Esto a fin de conocer cuál de las metodologías individuales (a través de estadísticos de decisión) se ajustaría a los indicadores mencionados.

Asimismo, se aplica *el test de Diebold y Mariano* a fin de constatar si una combinación de las predicciones obtenidas es más eficiente que las predicciones realizadas de manera individual, para las series mencionadas. (Sección 6).

- *Demostración empírica de que la predicción a través de la combinación de metodologías es más idónea que cualquier predicción realizada bajo una me-*

⁴Es preciso señalar que la selección del mercado móvil y la televisión de paga para el estudio se debe al dinamismo que han presentado. Sin embargo, la predicción podría utilizarse perfectamente para cualquier mercado del sector de las telecomunicaciones

todología individual. Asimismo, se muestra cómo se asignan los parámetros óptimos a cada metodología dentro de la combinación. (Secciones 7 y 8).

2. Estado actual del mercado móvil y televisión de paga

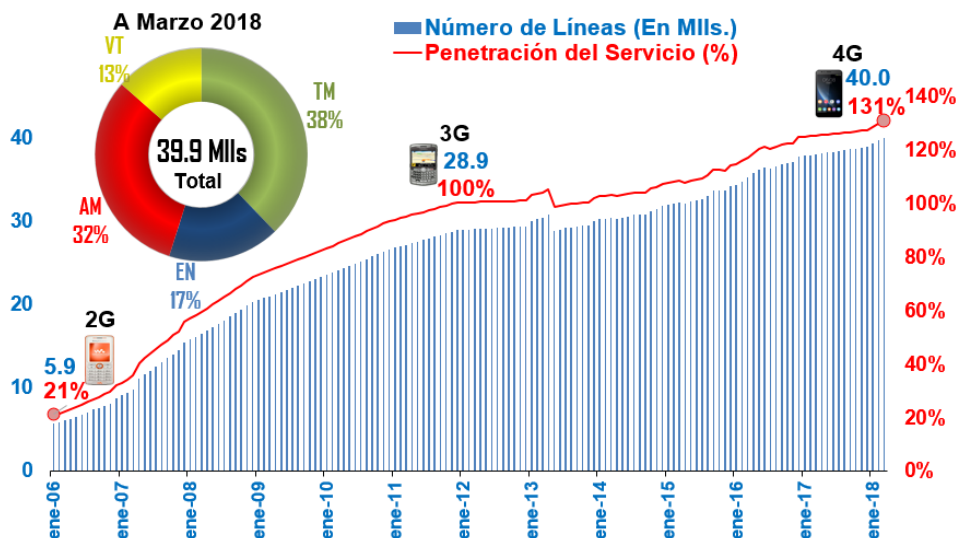
En el sector de telecomunicaciones peruano, la telefonía móvil es uno de los servicios más dinámicos y de mayor crecimiento. A marzo de 2018, este mercado contó con cuatro empresas operadoras con red propia (Telefónica del Perú (TM), América Móvil (AM), Entel (EN) y Viettel (VT)) y un operador móvil virtual (Inkacel⁵). Por su parte, la televisión de paga es un servicio que se brinda por un gran número de empresas operadoras, aunque la mayor parte de las suscripciones recaen solo en algunas pocas empresas.

A continuación se muestran brevemente estadísticas que reflejan la evolución y dinamismo tanto en el servicio de telefonía móvil como en el de televisión de paga.

2.1. Líneas móviles, participación de mercado y penetración

El número de líneas móviles mantiene una tendencia al alza. Así, a marzo de 2018 se registraron alrededor de 40 millones de líneas en servicio. Dicho crecimiento sostenido ha generado que, desde fines del 2010, en el Perú se cuente con más líneas móviles que habitantes⁶.

Figura 1: Evolución del número de líneas móviles y penetración del servicio (Ene. 2006 - Mar. 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

⁵Inkacel fue la empresa que adquirió a Virgin Mobile en agosto de 2017.

⁶De acuerdo con el Instituto Nacional de Estadística e Informática del Perú (INEI), al 31 de marzo de 2018, el Perú tenía una población de 30 millones 657 mil 614 personas, cifra inferior a las 40 millones 20 mil 419 líneas móviles en servicio.

Medida como el número de líneas por cada 100 habitantes, la tasa de penetración del servicio móvil continuó en ascenso. Si bien para enero de 2005 solo 15 de cada 100 habitantes contaban con una línea móvil, para noviembre de 2010 ya existía una línea móvil por cada habitante (penetración igual a 100%). Finalmente, a marzo de 2018, la tasa de penetración alcanzó las 131 líneas en servicio por cada 100 habitantes.

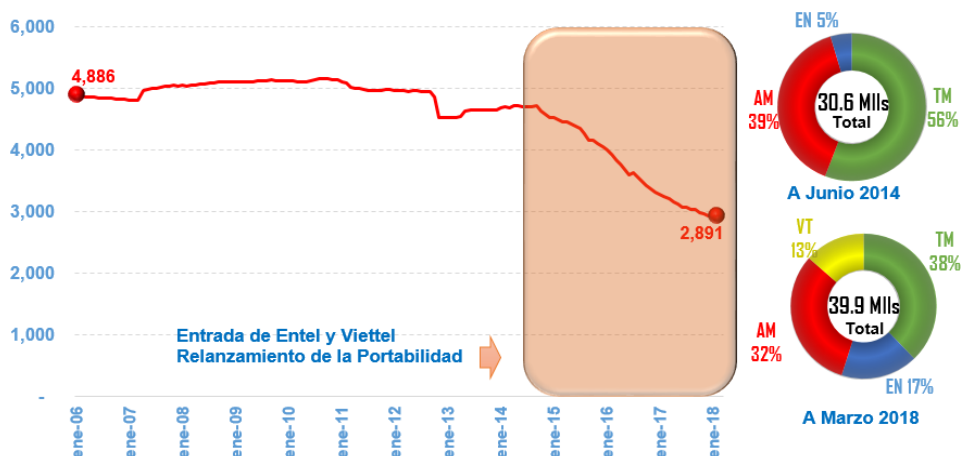
De acuerdo a la participación de líneas móviles en servicio por empresa operadora, a marzo de 2018, Telefónica del Perú ocupó el primer lugar con 15.1 millones de líneas en servicio (38% de participación), seguido de América Móvil con 12.6 millones (32% de participación) y, de Entel y Viettel con 6.8 (17%) y 5.4 (13%) millones, respectivamente.

2.2. Concentración del mercado

La evolución de la concentración de mercado en el servicio móvil (representado por el Índice de Hirschman-Herfindahl, en adelante HHI⁷) presenta una tendencia decreciente. La Figura 2 muestra que el HHI en enero de 2006 alcanzó el valor de 4,886; mientras que, a marzo de 2018, dicho indicador fue de 2,891.

A fin de observar la desconcentración del mercado móvil en los últimos cuatro años, la siguiente figura también presenta una comparación de las participaciones de mercado de las empresas operadoras antes del relanzamiento de la Portabilidad Numérica Móvil - PNM (junio de 2014), el desbloqueo de equipos móviles y el ingreso de Entel y Viettel, conjuntamente con las actuales participaciones de mercado (marzo de 2018).

Figura 2: Evolución del Índice de Concentración del Servicio - HHI (Ene. 2006 - Mar. 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

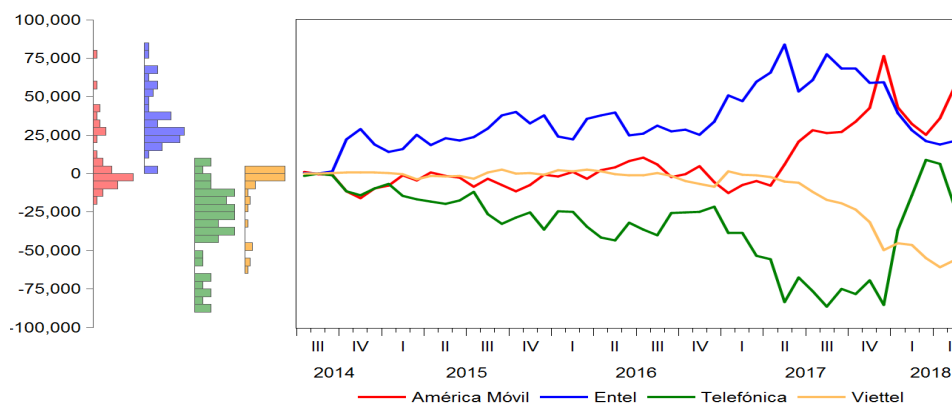
⁷Llamado HHI por sus siglas en inglés. El HHI se calcula a partir de las participaciones de mercado (m_i) de cada empresa operadora, de acuerdo a la siguiente fórmula: $HHI = \sum_{i=1} m_i^2$. Esta fórmula castiga a mayores participaciones; es decir, mientras mayor participación tenga un operador, el HHI se elevará en una mayor magnitud.

2.3. Número de teléfonos móviles efectivamente portados

La PNM ha mantenido una alta aceptación entre los usuarios desde su relanzamiento, lo cual se refleja en la cantidad de portaciones efectuadas desde ese momento. Solo en el mes de mayo de 2018 se registró un total de 703,772 líneas portadas, cifra 13.9% superior a la registrada en el mes anterior y que permite sumar un total de 9,008,415 portaciones desde junio de 2014.

Respecto a la posición neta acumulada, entre el 16 de julio de 2014 y el 31 de mayo de 2018, Telefónica del Perú es la empresa operadora que perdió una mayor cantidad de abonados (-1,529,539 líneas). Mientras tanto, Entel capturó una posición neta de 1,631,019 portaciones. La siguiente figura presenta la evolución de la cantidad de portaciones (en términos netos) por empresa operadora. (Ver figura 3).

Figura 3: Evolución de líneas móviles en servicio efectivamente portadas (en términos netos), a nivel de empresa operadora (julio. 2014 – mayo 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

Entel es la empresa que más usuarios ha obtenido por la PNM; sin embargo, esta cifra se ha reducido en los dos últimos trimestres. Por el contrario, América Móvil pasó de presentar portaciones netas cercanas a cero a presentar portaciones positivas (incluso un número de portaciones mayor a la de Entel).

Por su parte, Telefónica del Perú en los últimos trimestres ha venido mejorando su posición neta, mientras que Viettel se ha convertido en la empresa que más usuarios ha perdido por portabilidad en los dos últimos trimestres.

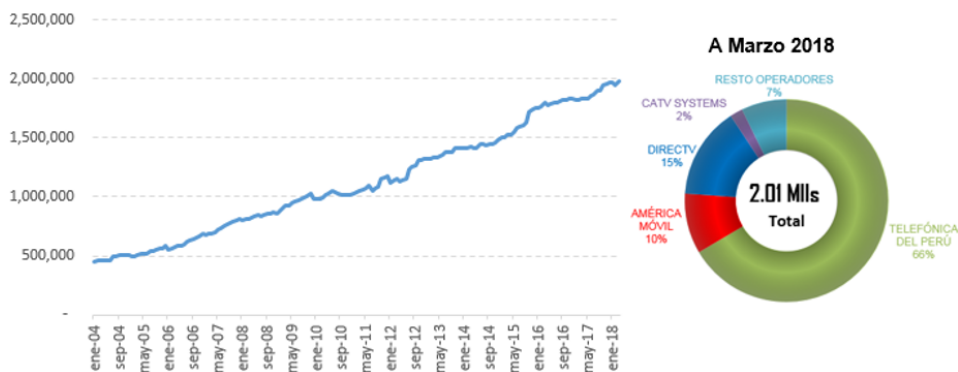
2.4. Número de suscripciones de televisión de paga

El servicio de televisión de paga se ofrece por un gran número de empresas operadoras a nivel nacional. La mayoría de ellas lo ofrecen tanto de manera individual (monoproducto) como parte de los servicios empaquetados (multiproducto, conjuntamente con los servicios de telefonía fija e internet fijo).

A marzo de 2018, el número de suscripciones a nivel nacional en el servicio de televisión de paga llegó a 1.98 millones (lo que equivale a una densidad de 6.5 suscripciones por cada 100 habitantes), mostrando un incremento de 8.2 %, respecto al mismo mes del año anterior.

En cuanto a la participación según empresa operadora, Telefónica del Perú contó con el 66 % del total de conexiones en servicio a nivel nacional, seguida por DIRECTV y América Móvil, con el 15 % y 10 % respectivamente; mientras que la participación restante (9 %) se les atribuye a operadores locales de cada región.

Figura 4: Evolución del número de suscripciones de televisión de paga y participación de mercado (enero 2014 – marzo 2018)



Fuente: Empresas Operadoras. Elaboración propia.

3. Tratamiento previo de la serie

Cualquier metodología para predecir los valores futuros de algún indicador (o variable) se basa principalmente sobre sus propios valores que tuvo en los periodos pasados (esto es, en su serie histórica). Sin embargo, antes de realizar cualquier predicción, el comportamiento de la serie histórica debe satisfacer dos supuestos:

- (i) La serie debe ser *No Estacional*.
- (ii) La serie deber ser *Estacionaria*.

Por tanto, resulta necesario analizar y observar si la serie histórica cumple con los supuestos (i) y (ii). En caso de que esta no cumpla con alguno de los supuestos, es necesario corregirla. Como aplicación se utilizan las series de número de líneas móviles en servicio y número de suscripciones de televisión de paga.

3.1. Estacionalidad

Toda serie está constituida por cuatro componentes no observables: (i) *Tendencial* (T_t), (ii) *Cíclico* (C_t), (iii) *Estacional* (E_t) e (iv) *Irregular* (I_t). Cada uno de estos componentes debe ser considerado al momento de “limpiar” la serie de aquellos

factores exógenos que no son de interés.

Existen diversas pruebas estadísticas que permiten detectar la existencia de estacionalidad dentro de una serie, como son el *F-Test* y el Test no-paramétrico de *Kruskal-Wallis*. Estas pruebas permiten contrastar lo siguiente:

$$H_0 : \text{La serie NO es estacional}$$

$$H_1 : \text{La serie SÍ es estacional}$$

Tabla 1: Prueba No-Paramétrica de Kruskal-Wallis⁸ para detectar Estacionalidad (*series de líneas móviles y suscripciones de televisión de paga*)

| Indicador | Estadístico de <i>Kruskal-Wallis</i> | Grados de Libertad | Probabilidad |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------|--------------|
| Líneas Móviles en servicio | 73.3154 | 11 | 0.00 % |
| Suscripciones de Televisión de Paga | 71.9198 | 11 | 0.00 % |

Elaboración propia.

Empleando como indicadores al número de líneas móviles en servicio y al número de suscripciones de televisión de paga, el estadístico de *Kruskal-Wallis* (W) arrojó -para ambos casos- un *p-value* asociado menor a 0.05, por lo que se rechaza la hipótesis nula de No Estacionalidad.

Dado que las series históricas de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga son estacionales, resulta necesario “*desestacionalizarlas*”. Para ello, se elige un modelo de desagregación de la serie en sus cuatro componentes. Los modelos más utilizados son:

- El modelo aditivo: $X_t = T_t + C_t + E_t + I_t$
- El modelo multiplicativo: $X_t = T_t * C_t * E_t * I_t$
- El modelo log-aditivo: $\text{Log}(X_t) = T_t + C_t + E_t + I_t$

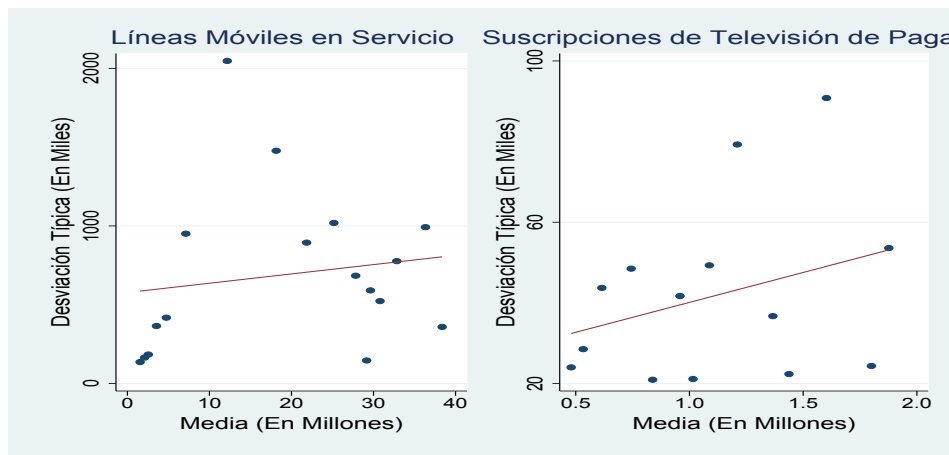
Con el propósito de seleccionar los modelos más adecuados para dichos indicadores, se recurre a una figura que relacione el valor promedio y la desviación estándar de las series históricas. En caso de que algunas de las figuras muestre una tendencia creciente, se aplicaría un modelo multiplicativo a dicha serie; mientras que, en el caso de que no muestre una tendencia (constante) se aplicaría un modelo aditivo.

⁸El Test de Kruskal-Wallis emplea el siguiente estadístico (W):

$$W = \frac{12}{N \times (N + 1)} \sum_{j=1}^k \frac{S_j^2}{n_j} - 3(N + 1)$$

En base a las series históricas de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga, la presencia de una tendencia creciente en la relación promedio-desviación estándar señala que el mejor modelo -para desestacionalizar ambas series- debe ser uno de corte multiplicativo.

Figura 5: Dispersión promedio - desviación estándar de las series históricas



Elaboración propia.

Luego, se selecciona la metodología que se implementará para la descomposición de las series. Entre las metodologías se encuentran *Tramo Seats*, *Census X-11* y *Census X-12*.

Algebraicamente, la descomposición de una serie histórica (X_t) conlleva a la aplicación de los siguientes pasos (P1 a P5). Sin embargo, es necesario mencionar que -más allá de la estimación de cada uno de dichos pasos- cualquier software econométrico arroja los resultados de manera instantánea, sin efectuar cálculos adicionales (Ver Anexo 1).

P1. Para estimar el componente tendencia-ciclo (TC_t) se efectúa un promedio móvil centrado de 12 términos.

$$TC_t = \frac{1}{24} * X_{t-6} + \frac{1}{12} \sum_{i=-5}^5 X_{t+i} + \frac{1}{24} X_{t+6}$$

P2. Para estimar el componente estacional-irregular (EI_t) se dividen los valores de la serie original entre los valores del componente tendencia-ciclo hallados en P1.

$$EI_t = \frac{X_t}{TC_t}$$

P3. Para obtener el componente estacional (E_t), se estima un promedio móvil de tres términos utilizando los valores de EI_t para cada mes.

$$E_t = \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^1 EI_{t+12*i}$$

P4. El componente irregular (I_t) se obtiene del ratio entre los valores de EI_t y E_t .

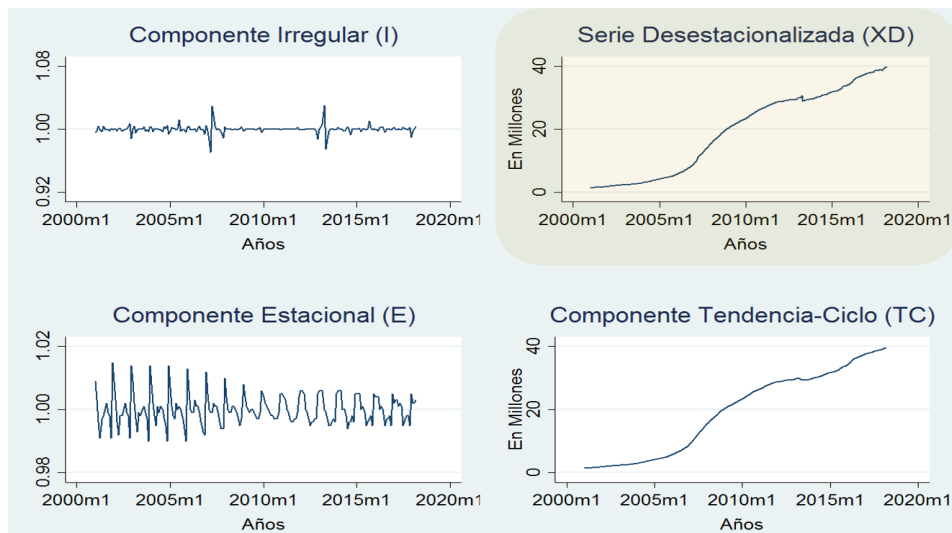
$$I_t = \frac{EI_t}{E_t}$$

P5. Finalmente, la serie *desestacionalizada* (XD_t) resulta de dividir los valores de la serie original entre los valores del componente estacional.

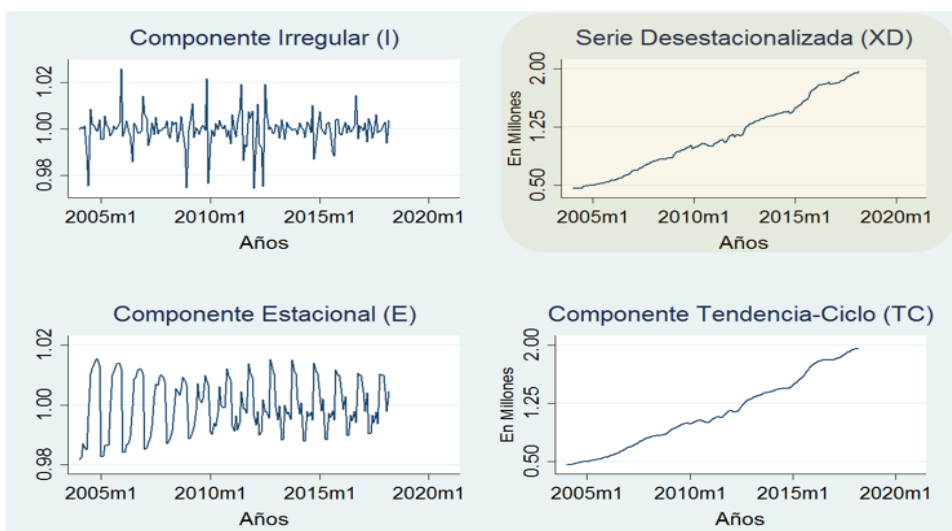
$$XD_t = \frac{X_t}{E_t}$$

A continuación, se muestra la desagregación de las serie históricas de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga en sus 4 componentes.

Figura 6: Descomposición de la evolución de las series históricas



(a) Líneas móviles en servicio



(b) Suscripciones de televisión de paga

En el presente análisis, las series históricas de interés son las sombreadas en la figura anterior (*Serie Desestacionalizada* (XD)). A partir de dichas series (sobre líneas móviles en servicio “desestacionalizada” y suscripciones de televisión de paga “desestacionalizada”) se obtendrán los resultados que se muestran en el resto del documento.

Opcionalmente, a través de la *Prueba Q* puede evaluarse la calidad del ajuste estacional de las series históricas. Mientras más cercano a cero se encuentre el valor de Q , mejor será el ajuste estacional.

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{11} w_i M_i}{w_i}, \quad Q \in [0, 3],$$

donde M_i es un conjunto de estadísticos de evaluación sobre la calidad de ajuste estacional y w_i son las ponderaciones que se le da a cada uno de esos estadísticos.

- En el caso de la serie de líneas móviles en servicio desestacionalizada se estimó un valor de $Q = 0.68$.
- En el caso de la serie de suscripciones de televisión de paga desestacionalizada se estimó un valor de $Q = 0.60$.

Por tanto, de acuerdo a los valores de la Prueba Q , ambas series históricas desestacionalizadas presentan un buen ajuste.

3.2. Estacionariedad

Una serie es estacionaria si su media y varianza son invariantes en el tiempo. Además, la covarianza entre dos periodos solo depende de su distancia o rezago, y no del tiempo en el que se estime la covarianza⁹.

Con el objetivo de detectar si existe estacionariedad (inexistencia de raíces unitarias) o no-estacionariedad (presencia de raíces unitarias), se recurre a las pruebas de Dickey-Füller Aumentado (ADF) y a la de Phillips-Perron (P-P)¹⁰. Para ello se plantea lo siguiente:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t, \quad \text{con } \delta = (\rho - 1)$$

Las hipótesis estadísticas de este tipo de pruebas permiten contrastar que:

$$H_0 : \delta = 0 \quad (\text{la serie no es estacionaria})$$

$$H_1 : \delta \neq 0 \quad (\text{la serie es estacionaria})$$

⁹Esto es: Media: $E(Y_t) = \mu$; Varianza: $Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$; Covarianza: $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$

¹⁰También existen otros métodos para detectar la existencia de estacionariedad de una serie. Como “*métodos informales*” se tiene el análisis gráfico y el análisis de correlograma; mientras que, como “*métodos formales*” se cuenta con la prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), la prueba de Elliott- Rothenberg-Stock (ERS) y la de Ng-Perron.

Los resultados de las pruebas ADF y P-P para la serie histórica de líneas móviles en servicio se muestran en la Tabla 2¹¹.

Tabla 2: Pruebas ADF y P-P para la detección de Estacionariedad sobre las series de *líneas móviles en servicio* y *suscripciones de televisión de paga*

| | | Líneas Móviles en servicio | | Suscripciones de TV de Paga | |
|--|------------|----------------------------|---------------|-----------------------------|---------------|
| Augmented Dickey-Füller test statistic | | t-Statistic | Prob.* | t-Statistic | Prob.* |
| | | -1.732509 | 0.7333 | -2.018758 | 0.5866 |
| Test Critical Values | 1 % level | -4.003902 | | -4.012944 | |
| | 5 % level | -3.432115 | | -3.436475 | |
| | 10 % level | -3.139793 | | -3.142358 | |

| | | Líneas Móviles en servicio | | Suscripciones de TV de Paga | |
|----------------------------------|------------|----------------------------|---------------|-----------------------------|---------------|
| Phillips - Perron test statistic | | Adj. T-Stat | Prob.* | Adj. T-Stat | Prob.* |
| | | -1.706414 | 0.7452 | -2.043744 | 0.5728 |
| Test Critical Values | 1 % level | -4.003226 | | -4.012944 | |
| | 5 % level | -3.431789 | | -3.436475 | |
| | 10 % level | -3.139601 | | -3.142358 | |

(*) Mackinnon (1996) one-sided p-values
Elaboración propia.

La tabla anterior muestra que los valores *p-value* asociados a las pruebas ADF y P-P son mayores a 0.05 (para ambos indicadores), por lo que se acepta la hipótesis nula de que las series son No Estacionarias. Para transformarlas a una serie estacionaria, se debe estimar la primera diferencia del logaritmo de la serie histórica (*Dlog*).

Luego, la siguiente tabla muestra que al extraer la primera diferencia al logaritmo (*Dlog*) de las series de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga, estas se convierten en series estacionarias. En particular, el *p-value* del test ADF es 0.0451 (para el caso de las líneas móviles en servicio) y 0.00 (para el caso de suscripciones de televisión de paga). Algo similar sucede con el test P-P.

Tabla 3: Pruebas ADF y P-P para la detección de Estacionariedad sobre la *Dlog* de *líneas móviles en servicio* y *suscripciones de televisión de paga*

| | | Líneas Móviles en servicio | | Suscripciones de TV de Paga | |
|--|------------|----------------------------|---------------|-----------------------------|--------------|
| Augmented Dickey-Füller test statistic | | t-Statistic | Prob.* | t-Statistic | Prob.* |
| | | -3.472672 | 0.0451 | -12.81387 | 0.000 |
| Test Critical Values | 1 % level | -4.003902 | | -4.013274 | |
| | 5 % level | -3.432115 | | -3.436634 | |
| | 10 % level | -3.139793 | | -3.142452 | |

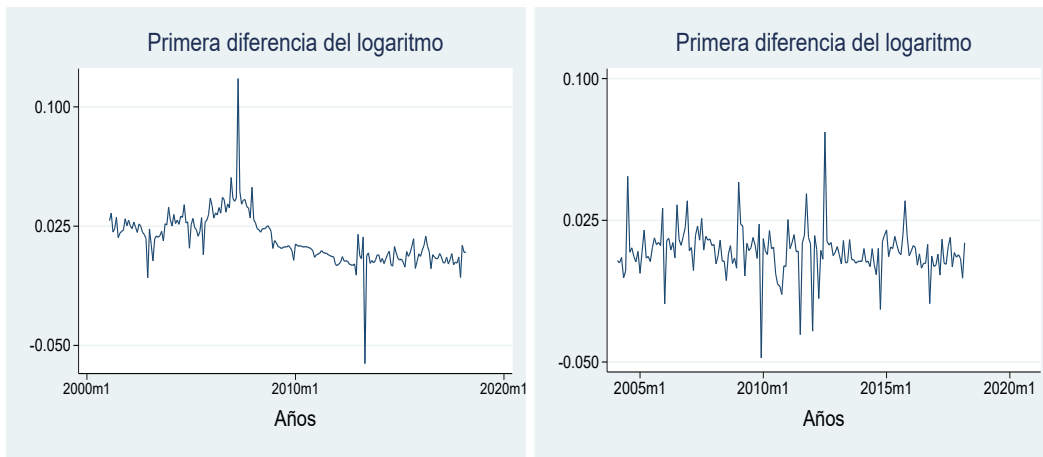
| | | Líneas Móviles en servicio | | Suscripciones de TV de Paga | |
|----------------------------------|------------|----------------------------|--------------|-----------------------------|--------------|
| Phillips - Perron test statistic | | Adj. T-Stat | Prob.* | Adj. T-Stat | Prob.* |
| | | -9.723775 | 0.000 | -12.8166 | 0.000 |
| Test Critical Values | 1 % level | -4.003449 | | -4.013274 | |
| | 5 % level | -3.431896 | | -3.436634 | |
| | 10 % level | -3.139664 | | -3.142452 | |

(*) Mackinnon (1996) one-sided p-values
Elaboración propia.

¹¹El Anexo 2 muestra la secuencia para detectar si existe estacionariedad en la serie temporal.

Lo anterior también se constata a través de la siguiente figura, en la que se muestra que con la *Dlog* (para cada uno de los indicadores) ya se presenta Estacionariedad.

Figura 7: Primera diferencia del logaritmo de las series históricas



(a) Líneas móviles en servicio

(b) Suscripciones de televisión de paga

4. Metodología de predicciones

Cuando la serie temporal de algún indicador ya es No-Estacional y Estacionaria, se recurre al empleo de metodologías de predicción con el objetivo de pronosticar el comportamiento que tendrá dicho indicador. Casi siempre es necesario realizar predicciones con más de una metodología, a fin de comparar y observar cuál es la predicción más precisa y robusta¹². La siguiente tabla muestra un resumen de las metodologías (y sus versiones) que existen para realizar predicciones a series univariadas.

Tabla 4: Metodologías (y sus correspondientes versiones) para el análisis de predicción

| | | Metodología | | | |
|-----------|-----------------------|---|--|--|--|
| | | Box-Jenkins (Procesos <i>ARIMA</i>) | Exponential Smoothing (Suavizamiento Exponencial) | Regresiones Polinomiales (o Tendencia Determinística) | Crecimiento Promedio Anual Compuesto |
| Versiones | | Muchos Modelos: | <i>Suavizamiento Exponencial Doble</i> | <i>Regresión Polinomial Simple</i> | <i>Estimación de la Tasa de Crecimiento Promedio Compuesta</i> |
| | | - <i>AR</i> (<i>p</i>) | <i>Holt-Winters Aditivo</i> | <i>Regresión Polinomial Cuadrática</i> | |
| | | - <i>MA</i> (<i>q</i>) | <i>Holt-Winters Multiplicativo</i> | <i>Regresión Polinomial Cúbica</i> | |
| | | - <i>ARIMA</i> (<i>p,d,q</i>) | <i>Holt-Winters No Estacional</i> | <i>Regresión Polinomial Cuártica</i> | |
| | - <i>SARIMA</i> (...) | | | (...) | |

Elaboración propia.

El problema surge cuando ante tantas metodologías de predicción posibles (e incluso versiones dentro de cada metodología) debe decidirse por la que mejor pro-

¹²Como se verá en la siguiente sección, si bien la base teórica suele parecer complicada, es necesario mencionar que muchos de los paquetes informáticos (en sus últimas versiones) ya vienen desarrollando de manera casi automática cada metodología.

nostique al indicador. Para esto, se estiman algunos estadísticos de decisión que permiten comparar entre las metodologías potenciales, con el objetivo de obtener la metodología (y su versión) más idónea para realizar predicciones¹³.

En adelante, los estadísticos relevantes que se utilizarán para comparar entre metodologías (y versiones dentro de una metodología) serán el coeficiente de Desigualdad de Theil (en adelante, U-Theil), la Raíz del Error Cuadrático Medio (en adelante, RMSE) y los Criterios de Información de Akaike, Schwartz y Hanna Quinn¹⁴. Mientras que, U-Theil y RMSE serán los estadísticos utilizados para comparar entre versiones de Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales, los Criterios de Información serán utilizados para comparar dentro de Box-Jenkins.

A continuación, se desarrolla brevemente la base teórica de cada metodología. Sin embargo, el lector que no esté interesado en la formalidad de las metodologías de predicción podría obviar lo que queda de este capítulo.

4.1. Metodología de Box-Jenkins¹⁵

Esta metodología considera que la serie temporal que se trata de predecir es generada por un proceso estocástico, cuya naturaleza puede ser caracterizada mediante un modelo. A esta metodología se le denominó *Procesos Autorregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA)*¹⁶¹⁷. A continuación se muestra brevemente sus componentes *AR* y *MA*, el mismo proceso *ARIMA* y la extensión *SARIMA*.

4.1.1. Proceso Autorregresivo: $AR(p)$

Los rezagos de una variable se expresan de manera simbólica por el término *AR* ($AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, ...) dependiendo de la cantidad de rezagos que se desea incluir. La forma general de un modelo $AR(p)$ viene dado por:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t$$

Esto indica que la variable y_t es explicada únicamente por sus “ p ” valores rezagados. Para ver si el proceso *AR* es estacionario, se aplica operadores de rezago:

¹³Por ello, es frecuente que los interesados en predicciones, realicen predicciones empleando más de una metodología y, sobre la base de dichos estadísticos compararlas y obtener la metodología (con su versión) más idónea.

¹⁴Estos estadísticos relevantes son calculados de la siguientes manera:

$$U - Theil = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(\hat{y}_t)^2}{n}} \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(y_t)^2}{n}}}; \quad RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}}$$

¹⁵En el Anexo 6 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

¹⁶Por sus siglas en inglés, *Autoregressive Integrated Moving Average*.

¹⁷Los modelos de series de tiempo no suelen comportarse exclusivamente como un Proceso Autorregresivo (*AR*) o un Proceso de Medias Móviles (*MA*). Normalmente, las series presentan ambos patrones de comportamientos, por esto se suele modelar bajo la *ARIMA*.

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi_0 + \phi_1 L y_t + \phi_2 L^2 y_t + \dots + \phi_p L^p y_t + a_t \\
y_t(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) &= \phi_0 + a_t \\
y_t \varphi_p(L) &= \phi_0 + a_t
\end{aligned}$$

El proceso AR es estacionario solo si las raíces del polinomio $\varphi_p(L)$ son mayores a 1.

$$\varphi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$$

Admitiendo la posibilidad de que algunas raíces sean imaginarias, están deben tener un módulo mayor a 1¹⁸.

4.1.2. Proceso de Medias Móviles: $MA(q)$

Los términos de error de la serie se suelen representar por la expresión $MA(MA(1), MA(2), MA(3), \dots)$, dependiendo de la cantidad de términos de error que se incluya.

La expresión general de un proceso $MA(q)$ es:

$$y_t = c + \theta_0 u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

De manera general, un $MA(\infty)$ tendrá lo siguiente representación:

$$y_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i u_{t-i}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
E(u_t) &= 0 \\
E(u_t^2) &= \sigma^2 \\
\gamma_{t,s} = C(u_t, u_{t-s}) &= 0, \quad t \neq s
\end{aligned}$$

4.1.3. Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles $ARIMA(p, d, q)$

Como se trabaja con series ya estacionarias, el orden de integración de las variables será 0. Así, un modelo de este tipo sería un $ARIMA(p, 0, q)$ o simplemente $ARMA(p, q)$, la cual se expresa bajo la siguiente notación:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_0 u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j u_{t-j}$$

¹⁸Todo proceso AR estacionario puede ser expresado como un $MA(\infty)$.

Como ejemplo, un proceso $ARMA(1,1)$ vendría dada por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$$

Para que un modelo $ARMA$ sea estacionario solo basta observar si su componente AR es estacionario. Si se cumple que $|\phi| < 1$, el proceso es estacionario.

Realizando sustituciones sucesivas se puede obtener la representación $MA(\infty)$ de este proceso.

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + u_t + (\theta + \phi) \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{i-1} u_{t-i}$$

La media del proceso es $c/(1-\phi)$, la misma que no depende del tiempo. La varianza (γ_0) y la autocovarianza (γ_i) tendrán la siguiente estructura:

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{(1 + 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \sigma^2 \frac{(\theta + \phi)(1 + \theta\phi)}{1 - \phi^2}$$

Donde se cumple que $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$ para $k \geq 2$.

4.1.4. Modelo Autorregresivo Estacional Integrado de Medias Móviles

Una extensión de los modelos $ARIMA$ son los modelos $SARIMA$ (modelo $ARIMA$ + *Componente estacional*), debido a la complejidad y amplitud de su desarrollo se obvia la demostración de este tipo de modelos. La forma general de un modelo $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ es la siguiente:

$$\varphi_p(L)\Phi_P(L^s)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \theta_q(L)\Theta_Q(L^s)u_t$$

Donde:

s : Componente estacional (en nuestro caso será 12, por ser data mensual)

$\varphi_p(L)$: Polinomio de rezagos del componente $AR(p)$

$\Phi_P(L^s)$: Polinomio de rezagos del componente AR estacional (P)

Δ^d : Operador de diferencias de orden “ d ”

Δ_s^D : Operador de diferencias del componente estacional “ s ”

$\theta_q(L)$: Polinomio de rezagos del componente $MA(q)$

$\Theta_Q(L^s)$: Polinomio de rezagos del componente MA estacional (Q)

4.2. Metodología sobre Suavizamiento Exponencial

El Suavizamiento Exponencial es una metodología de predicción que asigna mayores ponderaciones a las observaciones más recientes, con la característica de que las ponderaciones asignadas van reduciéndose de manera exponencial a medida que las observaciones son más distantes al periodo actual.

Existen diversas versiones de esta metodología. El uso de una u otra versión depende del ajuste y las características de la distribución de los datos. Nuevamente, las diversas versiones pueden ser comparadas a través de estadísticos como la U-Theil y la RMSE, a fin de observar cuál es la versión más precisa en base a esta metodología.

Específicamente, existen seis versiones de esta metodología:

4.2.1. Suavizamiento Exponencial Simple

Esta versión es apropiada para series que se mueven aleatoriamente alrededor de un valor promedio (sin tendencia ni patrones estacionales). La serie suavizada \hat{y}_t de y_t se estima de manera recursiva:

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1}, \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

Para ello, se necesita un valor inicial de \hat{y}_t y un valor para α . Las predicciones bajo esta versión son constantes para las observaciones futuras. Dicha constante viene dada por:

$$\hat{y}_{T+k} = \hat{y}_T, \forall k > 0$$

Donde T es la última observación de la muestra de estimación.

4.2.2. Suavizamiento Exponencial Doble o Versión de Holt

Esta versión aplica Suavizamiento Exponencial simple dos veces. Es apropiada para series que tienen una tendencia lineal. La serie y_t es definida por las recursiones:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \\ D_t &= \alpha S_t + (1 - \alpha)D_{t-1} \end{aligned}$$

Donde S es la serie suavizada simple, D es la serie suavizada doble y $0 < \alpha < 1$. Las predicciones de suavizamiento exponencial doble son estimadas como:

$$\hat{y}_{T+k} = 2S_T - D_T + \frac{\alpha}{1 - \alpha}(S_T - D_T)k$$

La expresión $\alpha(S_T - D_T)/(1 - \alpha)$ indica la pendiente.

4.2.3. Versión Holt-Winters Multiplicativo

Esta versión es empleada cuando las series tienen una tendencia lineal y variación estacional multiplicativa¹⁹. La serie suavizada \hat{y}_t esta dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = (a + bk)c_{t+k}$$

Donde a es el componente permanente; b es la tendencia y, c_t es el factor estacional multiplicativo. Estos coeficientes son definidos por las siguientes recursiones:

¹⁹Esta versión tiene la ventaja de adaptarse fácilmente a medida que se tiene nueva información disponible.

$$\begin{aligned}
a(t) &= \alpha \frac{y_t}{c_t(t-s)} + (1 - \alpha)(a(t-1) + b(t-1)) \\
b(t) &= \beta(a(t) - a(t-1)) + b(1 - \beta)(t-1) \\
c_t(t) &= \gamma \frac{y_t}{a(t)} + c_t(1 - \gamma)(t-s)
\end{aligned}$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento y s es la frecuencia de la estacionalidad. Las predicciones son estimadas como:

$$\hat{y}_{t+k} = (a(T) + b(T)k)c_{T+k-s}$$

4.2.4. Versión Holt-Winters Aditivo

Esta versión es apropiada para series con una tendencia temporal lineal y variación estacional aditiva. La serie suavizada \hat{y}_t viene dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = a + bk + c_{t+k}$$

Donde a , b y c son los componentes permanente, tendencial y estacional aditivo. Los tres coeficientes son definidos por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}
a(t) &= \alpha(y_t - c_t(t-s)) + (1 - \alpha)(a(t-1) + b(t-1)) \\
b(t) &= \beta(a(t) - a(t-1)) + 1 - \beta b(t-1) \\
c_t(t) &= \gamma(y_t - a(t+1)) + \gamma c_t(t-s)
\end{aligned}$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento y s es la frecuencia de la estacionalidad. Las predicciones son estimadas como:

$$\hat{y}_{t+k} = a(T) + b(T)k + c_{T+k-s}$$

4.2.5. Versión Holt-Winters No-Estacional

Esta versión es empleada en series con tendencia lineal pero sin componente estacional. En ese sentido, esta versión es muy similar a la de Suavizamiento Exponencial Doble. La serie suavizada \hat{y}_t está dada por:

$$\hat{y}_{t+k} = a + bk$$

Los coeficientes a y b se definen por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}
a(t) &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(a(t-1) + b(t-1)) \\
b(t) &= \beta(a(t) - a(t-1)) + 1 - \beta b(t-1)
\end{aligned}$$

Donde $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ son los factores de suavizamiento. Las predicciones son calculadas como:

$$\hat{y}_{T+k} = a(T) + b(T)k$$

4.2.6. Suavizamiento Exponencial Cuadrático o Versión de Brow

Las versiones estudiadas (en 4.2.1. al 4.2.5) arrojan resultados con un elevado error al intentar predecir series temporales que presentan una tendencia no lineal en su comportamiento.

Sin embargo, en estos casos se emplea la versión cuadrática o de Brow. La idea detrás de esta versión es aplicar un triple suavizamiento exponencial.

Las predicciones sobre Suavizamiento Exponencial Cuadrático son estimadas de la siguiente manera:

$$\hat{y}_{T+k} = 3S'_T - 3S''_T + S'''_T + k \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} [(6-5\alpha)S'_T - (10-8\alpha)S''_T + (4-3\alpha)S'''_T] \\ + k^2 \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} (S'_T - 2S''_T + S'''_T)$$

Donde S' es la serie suavizada simple, S'' es la serie suavizada doble, S''' es la serie suavizada triple y α es el factor de suavizamiento exponencial que pertenece al intervalo $[0,1]$. Además,

$$S'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S'_{t-1} \\ S''_t = \alpha S'_t + (1-\alpha)S''_{t-1} \\ S'''_t = \alpha S''_t + (1-\alpha)S'''_{t-1}$$

4.3. Metodología sobre Regresiones Polinomiales

Esta metodología es una extensión a los modelos de regresión lineal. Para ello, se plantea una ecuación de grado “ n ”. En muchos casos la variable independiente del modelo de regresión es el tiempo.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Para aplicar el método de mínimos cuadrados ordinarios se parte de la función de regresión muestral:

$$y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_i + \hat{a}_2x_i^2 + \dots + \hat{a}_nx_i^n + \hat{u}_i,$$

donde \hat{a}_i son los estimadores y \hat{u}_i los residuos de la regresión. Minimizando la suma de los residuos al cuadrado (S).

$$S = \sum_{i=0}^m \hat{u}_i^2 = \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1x_i - \hat{a}_2x_i^2 - \dots - \hat{a}_nx_i^n)^2$$

Las derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{dS}{da_0} = -2 \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1x_i - \hat{a}_2x_i^2 - \dots - \hat{a}_nx_i^n) = 0$$

$$\frac{dS}{da_1} = -2x_i \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_2 x_i^2 - \dots - \hat{a}_n x_i^n) = 0$$

⋮

$$\frac{dS}{da_n} = -2x_i^n \sum_{i=0}^m (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i - \hat{a}_2 x_i^2 - \dots - \hat{a}_n x_i^n) = 0$$

En base a las derivadas parciales presentadas, se realiza una representación matricial del sistema de ecuaciones normales asociadas.

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x & * \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_{xy} \\ \hat{\mathbf{a}} & = \mathbf{A}_x^{-1} * \mathbf{A}_{xy} \end{aligned}$$

Siempre y cuando la matriz \mathbf{A}_x sea invertible, se puede hallar el vector de estimadores $\hat{\mathbf{a}}$. Para los propósitos del presente documento, la variable “ x ” vendría representada por el tiempo $t \in [0, \dots, m]$.

4.4. Metodología sobre Tasa de Crecimiento Promedio Compuesta

Esta es una de las metodologías de más fácil aplicación²⁰ (no se requiere ninguna condición previa). Para su implementación se considera el valor inicial y el valor final que tomó el indicador en cuestión. Así, sea t_0 y t_n el valor inicial (pasado) y el valor final (presente) del indicador, se calcula la tasa de crecimiento y se supone que –para los siguientes periodos- el indicador crecerá a la misma tasa. De esta forma, la tasa de crecimiento viene dada por:

$$Tasa\ de\ Crecimiento = \left(\frac{Valor\ Presente\ (t_n)}{Valor\ Pasado\ (t_0)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Donde “ n ” es el tamaño de la serie. Por tanto, el valor estimado para cada uno de los siguientes datos, puede ser estimado de la siguiente forma:

$$Valor\ presente = Valor\ pasado * (1 + Tasa\ de\ Crecimiento)^n$$

²⁰Es necesario que los intervalos de tiempos sean regulares (por ej. mensual, trimestral, etc.).

5. Test de Diebold y Mariano

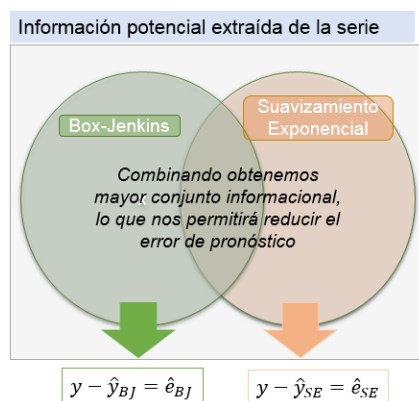
Como se mencionó anteriormente, es frecuente que los agentes estimen valores de predicción diferentes para un mismo indicador, a pesar de que se utilicen los mismos datos históricos. Esto puede suceder cuando se utilizan distintas metodologías. Al respecto, cada metodología maneja la información de manera diferente y, por ende, extrae información distinta, la misma que –independientemente de la metodología que se aplique– puede ser considerada como información valiosa.

Luego, ante la presencia de predicciones bajo distintas metodologías, es común observar que los investigadores –a través de distintos estadísticos– opten por utilizar una única técnica de predicción. Sin embargo, si bien estas técnicas permiten escoger el mejor modelo de predicción, cuando se deja de lado el resto de técnicas es muy probable que no se considere información importante que la técnica seleccionada no captura.

En base a esto, existe una prueba estadística importante (y relativamente nueva) que permite conocer si efectivamente la metodología “más idónea” es la que mejor predice los datos; o en su defecto, si una posible combinación de las mejores predicciones obtenidas por dos o más metodologías arroja un resultado más robusto. Este test propuesto por Diebold y Mariano (1995). Por tanto, según este test, si se considera más de una metodología es probable que la predicción se ajuste más a los datos si las metodologías colaboran con diferente información valiosa.

La siguiente figura muestra que si bien ambas metodologías (Box-Jenkins y Suavizamiento Exponencial) consideran como “información valiosa” parte de la información potencial que brinda la serie de datos histórica, también se muestra que cada metodología utiliza información que no es considerada por la otra metodología. Esta combinación de metodologías se puede generalizar para un mayor número de metodologías potenciales a ser utilizadas.

Figura 8: Extracción de información sobre la base de las metodologías de predicción (Base para la prueba de Diebold y Mariano)



Elaboración propia.

En este documento se considera la comparación de metodologías individuales y combinación de metodologías hasta un máximo de tres metodologías. A saber: Suavizamiento Exponencial, Box-Jenkins y Regresiones Polinomiales.

5.1. Para predicciones empleando combinación de dos metodologías

Para evaluar si dos metodologías de predicción conjuntas podrían explicar de manera más robusta el comportamiento de una serie en comparación a una metodología individual, se realiza una combinación lineal convexa de los valores predichos por ambas metodologías \hat{y}_1 y \hat{y}_2 ²¹.

$$\hat{y}_c = \alpha\hat{y}_1 + (1 - \alpha)\hat{y}_2$$

Donde, $\alpha \in [0, 1]$. El problema radica en encontrar el ponderador óptimo (α) que minimice el Error Cuadrático Medio (*ECM*) de \hat{y}_c . Esto es que el *ECM* de la combinación sea menor que el *ECM* de las predicciones de manera individual (*ECM* de \hat{y}_1 y el *ECM* de \hat{y}_2).

Si se asume que los errores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son insesgados, entonces los errores de predicción también serán insesgados. Bajo este supuesto se obtiene la siguiente equivalencia.

$$ECM[\hat{e}_c] = Var[\hat{e}_c]$$

Mediante algunas manipulaciones algebraicas con el objetivo de encontrar una combinación lineal de los errores de predicción, se tiene que²²:

$$\begin{aligned}\hat{y}_c - y &= \alpha(\hat{y}_1 - y) + (1 - \alpha)(\hat{y}_2 - y) \\ \hat{e}_c &= \alpha(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)(\hat{e}_2)\end{aligned}$$

Aplicando varianza en ambos lados de esta última expresión,

$$\begin{aligned}Var(\hat{e}_c) &= Var[\alpha(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)(\hat{e}_2)] \\ Var(\hat{e}_c) &= \alpha^2 Var(\hat{e}_1) + (1 - \alpha)^2 Var(\hat{e}_2) + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)\end{aligned}$$

En tal sentido, minimizar el *ECM* (o la varianza) significa que:

$$\frac{dVar(\hat{e}_c)}{d\alpha} = 2\alpha Var(\hat{e}_1) - 2(1 - \alpha)Var(\hat{e}_2) + 2(1 - 2\alpha)Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = 0$$

$$\alpha^* = \frac{Var(\hat{e}_2) - Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)}{Var(\hat{e}_1) + Var(\hat{e}_2) - 2Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)}$$

De esta modo, se obtiene un *ECM* (de la combinación de predicciones) menor que los *ECM* de las predicciones individuales. Una forma alterna para obtener

²¹Para fines prácticos se obvia los índices temporales y el horizonte de proyección de la serie “ y ”.

²²La ventaja de trabajar con los errores de predicción es que estos son estacionarios.

el ponderador óptimo α^* es por medio de una regresión MCO sobre la siguiente ecuación transformada,

$$\begin{aligned}\hat{e}_c &= \alpha (\hat{e}_1) + (1 - \alpha) (\hat{e}_2) \\ \Rightarrow \hat{e}_2 &= \alpha (\hat{e}_2 - \hat{e}_1) + \hat{e}_c,\end{aligned}$$

donde el error combinado (\hat{e}_c) es el residuo que se obtiene de la regresión. Esta forma es más fácil porque permite realizar pruebas de hipótesis sobre el ponderador α .

$$H_0 : \alpha_{MCO} = 0$$

$$H_1 : \alpha_{MCO} \neq 0$$

Si se acepta estadísticamente la hipótesis nula, significa que la metodología con la que se predijo \hat{y}_1 no aporta información relevante para mejorar la proyección obtenida por \hat{y}_2 . Por otro lado, si se rechaza estadísticamente la hipótesis nula significa que la metodología por la que se predijo \hat{y}_1 sí aporta información importante al predictor \hat{y}_2 , por lo que es mejor combinar metodologías de predicción.

5.2. Para predicciones empleando combinación de tres metodologías

Generalizando la combinación de predicciones para 3 metodologías, se parte de la siguiente ecuación:

$$\hat{y}_c = \alpha \hat{y}_1 + \beta \hat{y}_2 + \theta \hat{y}_3, \quad \text{donde: } \alpha + \beta + \theta = 1$$

Por lo que puede establecerse el error combinado como sigue:

$$\hat{e}_c = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \theta \hat{e}_3$$

Para fines de la regresión MCO se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\hat{e}_c &= \alpha \hat{e}_1 + (1 - \alpha - \theta) \hat{e}_2 + \theta \hat{e}_3 \\ \Rightarrow \hat{e}_2 &= \alpha (\hat{e}_2 - \hat{e}_1) + \theta (\hat{e}_2 - \hat{e}_3) + \hat{e}_c\end{aligned}$$

Teniendo como hipótesis nula,

$$H_0 : \alpha_{MCO} = \theta_{MCO} = 0$$

$$H_1 : \alpha_{MCO} = \theta_{MCO} \neq 0$$

Nuevamente, si no se rechaza la hipótesis nula, significa que las metodologías que predijeron \hat{y}_1 y \hat{y}_3 no aportan información relevante para mejorar la predicción de \hat{y}_2 . Por el contrario, si se rechaza la hipótesis nula, la mejor predicción se obtiene de combinar las metodologías de predicción²³.

²³Notar que ahora la prueba de hipótesis es una prueba conjunta por lo que se debe utilizar el estadístico F.

6. Aplicación y resultados sobre predicciones

Se emplea la serie de número de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga, a fin de estimar los valores que tomarán estos indicadores al cierre del año 2020. Para esto, se considera información proveniente de la Norma de Requerimientos de Información Periódica (NRIP) del OSIPTEL²⁴. En particular, se emplea como data histórica el número de líneas móviles en servicio (desde enero del 2001 hasta marzo del 2018) y suscripciones de televisión de paga (desde enero del 2004 hasta marzo del 2018)²⁵. En las secciones previas (3.1 y 3.2), estas series fueron tratadas a fin de que sean No-Estacionales y Estacionarias.

En adelante, con el objetivo de no extender demasiado el documento, se presenta únicamente los resultados para las predicciones individuales del número de líneas móviles en servicio al cierre del 2020. Sin embargo, para la combinación de metodologías de predicción nuevamente se vuelven a considerar los resultados para la serie de suscripciones de televisión de paga.

6.1. Predicciones a partir de distintas metodologías de manera individual

Las predicciones de las líneas móviles en servicio al cierre del 2020 son realizadas en base a distintas metodologías: (i) Suavizamiento Exponencial, (ii) Box-Jenkins (o Procesos *ARIMA*), (iii) Regresiones Polinomiales (o Tendencia Determinística), y (iii) Tasa de Crecimiento Promedio Compuesta.

Como se mencionó, a su vez cada metodología presenta diversas versiones (ver Tabla 4 en Capítulo 4). Por ello, la primera tarea es estimar las predicciones y compararlas (en base a estadísticos como RMSE, U-Theil y Criterios de Información), con el propósito de conocer la versión de cada metodología que más se ajuste a la serie de datos históricos.

6.1.1. Predicción bajo Metodología de Suavizamiento Exponencial²⁶

La aplicación de Suavizamiento Exponencial muestra que *la versión de Holt-Winters No Estacional* es la más idónea. Esto, por presentar la menor U-Theil (0.0042) y la menor RMSE (195,855), en comparación al resto de versiones. La segunda versión más eficiente para esta metodología es la de Holt-Winters Aditivo, la cual cuenta con una RMSE de 202,178 y una U-Theil igual a 0.0043. (Ver siguiente Tabla).

²⁴Las predicciones realizadas a continuación se basan en información actualizada a junio de 2018. Así, cualquier cambio en los datos podría alterar los resultados obtenidos.

²⁵Esto es, una serie compuesta por más de 200 observaciones para predecir 33 observaciones.

²⁶En el Anexo 3 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

Tabla 5: Versión Más Idónea bajo Suavizamiento Exponencial para la serie de *líneas móviles en servicio*

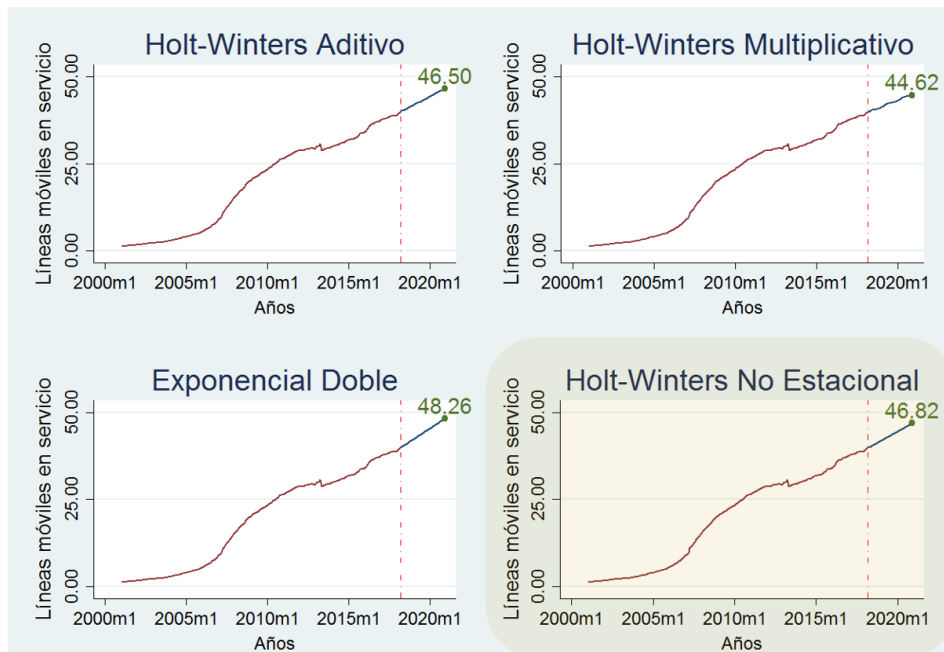
| Suavizamiento Exponencial | Estadísticos | |
|-----------------------------------|----------------|----------------|
| | <i>RMSE</i> | <i>U-Theil</i> |
| Holt-Winters Aditivo | 202,178 | 0.0043 |
| Holt-Winters No Estacional | 195,855 | 0.0042 |
| Suavizamiento Exponencial Doble | 376,934 | 0.0081 |
| Holt-Winters Multiplicativo | 384,464 | 0.0082 |

Elaboración propia.

Los resultados mostrados en la Tabla 5 se asocian con las predicciones presentadas en la siguiente figura. En efecto, ambas versiones (Holt-Winters No Estacional y Holt-Winters Aditivo) estimaron una predicción similar para el total de líneas móviles en servicio para el cierre del año 2020 (46.8 millones y 46.5 millones, respectivamente).

Mientras que, las otras dos versiones (Exponencial Doble y Holt-Winters Multiplicativo) arrojaron predicciones muy por debajo (o muy por encima) de los valores predichos por las versiones que mejor se ajustaron a la serie de datos analizada. Es por esta razón, que a dichas versiones se les asocia mayores niveles en los indicadores U-Theil y RMSE²⁷.

Figura 9: Predicciones para *líneas móviles en servicio* bajo la Metodología de Suavizamiento Exponencial (En Millones)



Elaboración propia.

²⁷En el Anexo 8 se muestra el análisis gráfico de los residuos para esta metodología en EViews.

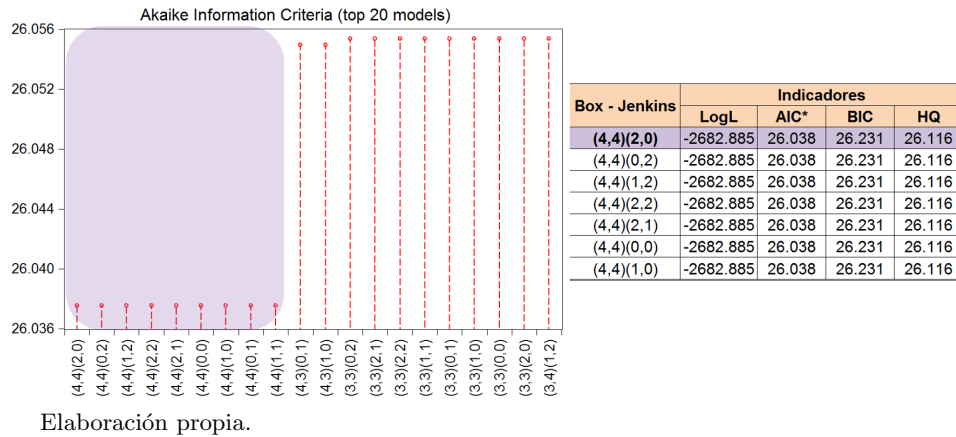
6.1.2. Predicción bajo Metodología de Box-Jenkins²⁸

Hasta hace unos cuantos años, la elección de un modelo de predicción bajo la metodología de Box-Jenkins era un trabajo arduo, dado que esto se realizaba mediante un procedimiento de ensayo-error, lo cual conlleva a que -en muchas ocasiones- el modelo escogido no necesariamente sea el más idóneo.

No obstante, las últimas actualizaciones en muchos programas econométricos arrojan de manera inmediata el modelo más idóneo -bajo esta metodología- para la serie analizada. Incluso, además de presentar el mejor modelo de predicción para los datos históricos de la serie, también arrojan un ranking con los modelos *ARIMA* que más se ajustan a la serie.

En el caso de la metodología de Box-Jenkins, los Criterios de Información (Akaike, Schwarz y Hannan-Quin) son preferibles a RMSE y a U-Theil, como estadísticos de decisión. Por ello, en base a los Criterios de información, el área sombreada de la figura izquierda muestra que existen cuatro modelos idóneos (con un valor de Akaike de 26.03). La tabla de la derecha confirma que cualquiera de esos cuatro modelos podrían ser empleados para realizar predicciones, al mostrar que en el resto de Criterios de Información estos modelos también obtuvieron los mismos valores.

Figura 10: Modelos Más Idóneos para predecir *líneas móviles en servicio* bajo la Metodología de Box-Jenkins



Así, los modelos de Box-Jenkins potenciales a ser usados serían **SARIMA** $(4, 1, 4)(2, 0, 0)_{12}$, SARIMA $(4,1,4)(0, 0, 2)_{12}$, SARIMA $(4,1,4)(1, 0, 2)_{12}$, SARIMA $(4,1,4)(2, 0, 2)_{12}$. En particular, el primer modelo predice un valor de 47.4 millones de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020²⁹.

²⁸En el Anexo 4 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

²⁹En el Anexo 9 se muestra el análisis gráfico de los residuos para la metodología de Box-Jenkins realizadas en EViews.

6.1.3. Predicción bajo Metodología de Regresiones Polinomiales³⁰

Para el caso de la metodología de Regresiones Polinomiales se muestran las predicciones realizadas para los cuatro primeros grados (lineal, cuadrática, cúbica y cuártica)³¹. Una vez obtenidas las predicciones por cada grado, se estiman los RMSE y U-Theil, a fin de identificar la versión que permita mejores predicciones (Ver tabla 6).

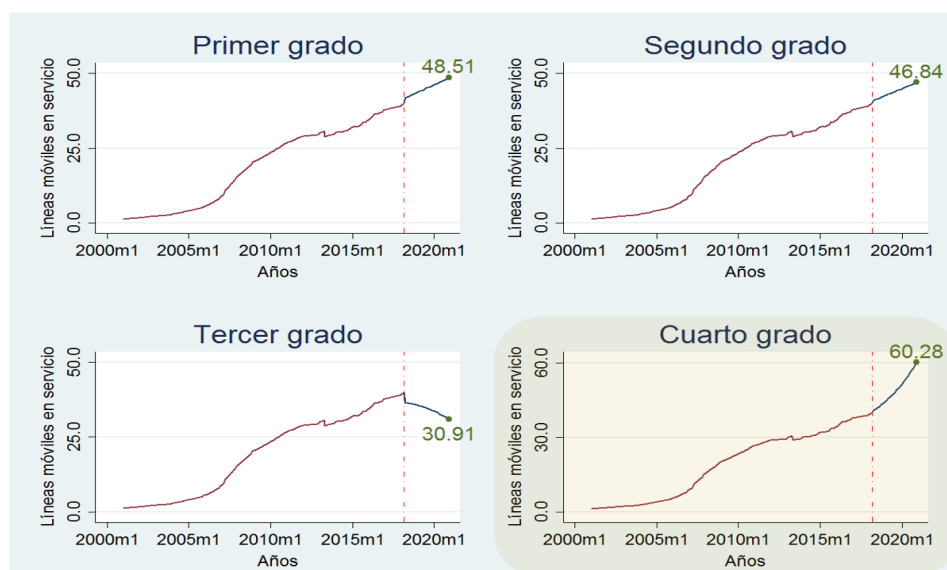
Tabla 6: Versión Más Idónea bajo Regresiones Polinomiales para la serie de líneas móviles en servicio

| Regresiones Polinomiales | Estadísticos | |
|--------------------------------|------------------|---------------|
| | RMSE | U-Theil |
| Primer Grado o Lineal | 2,520,079 | 0.0542 |
| Segundo Grado o Cuadrática | 2,494,616 | 0.0536 |
| Tercer Grado o Cúbica | 1,891,061 | 0.0406 |
| Cuarto Grado o Cuártica | 1,260,541 | 0.0270 |

Elaboración propia.

De acuerdo a la tabla anterior, bajo esta metodología la mejor versión para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio corresponde a la de **cuarto grado** (menores valores de RMSE y U-Theil que el resto de versiones)³².

Figura 11: Predicciones para líneas móviles en servicio bajo la Metodología de Regresiones Polinomiales (En Millones)



Elaboración propia.

³⁰En el Anexo 5 se muestra la secuencia para realizar esta metodología en EViews.

³¹Primer grado o lineal: $y_t = a_0 + a_1t$

Segundo grado o cuadrática: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$

Tercer grado o cúbica: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$

Cuarto grado o cuártica: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4$

³²En el Anexo 7 se muestra el análisis gráfico de los residuos para esta metodología en EViews.

En base a la Figura 11, la versión más idónea de la metodología de Regresiones Polinomiales para predecir la serie de líneas móviles en servicio es la de Cuarto Grado. Así, mediante esta versión se predice que existirán alrededor de 60.28 millones de líneas móviles al cierre del 2020, cifra muy superior que la predicha por las anteriores metodologías.

6.2. Comparación de predicciones realizadas por distintas metodologías

En muchas ocasiones, las predicciones son realizadas considerando una única metodología y encontrando la mejor versión (o modelo) de predicción para una serie determinada. El problema que surge con esto, es que al utilizar una única metodología no se tiene la seguridad de haber empleado la más idónea. Por tal motivo, en este documento se realizó las predicciones considerando distintas metodologías.

Resumiendo las mejores versiones (o modelos) que se han estimado para cada una de las metodologías se tiene que:

- Bajo la metodología de **Box-Jenkins**, el modelo que mejor se ajustó fue un SARIMA (4,1,4)(2,0,0)₁₂. Esto es, un proceso ARIMA con componente estacional.
- Bajo la metodología de **Suavizamiento Exponencial**, la versión que más se ajusta corresponde a un Holt-Winters No Estacional.
- Con la metodología de **Regresiones Polinomiales (o Tendencia determinística)**, se seleccionó un modelo de cuarto grado.
- Con el método de **Crecimiento Promedio Compuesto**, el modelo de mayor ajuste es uno asociado a una tasa de crecimiento mensual de 1.65 %.

Luego de conocer las mejores versiones para cada metodología, se pueden emplear nuevamente los estadísticos RMSE y U-Theil³³ con el propósito de conocer cuál es la metodología (y versión) más idónea para predecir una determinada serie. Para nuestro caso, las líneas móviles en servicio al cierre del año 2020.

De este modo, la Tabla 7 muestra que -entre todas las metodologías empleadas- la metodología de Box-Jenkins es la más idónea para predecir las líneas móviles en servicio. Esto, porque presenta una menor RMSE (107,403) y una menor U-Theil (0.0023). Por tanto, si se decide por considerar una única metodología para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio, esta debería ser la de Box-Jenkins (en especial, un SARIMA (4,1,4)(2,0,0)₁₂). Como segunda opción se tiene a la metodología de Suavizamiento Exponencial (en su versión Holt-Winters No Estacional), la cual presenta un valor de RMSE y U-Theil cercano a la de Box-Jenkins.

³³Si bien se mencionó que, en el caso de Box-Jenkins los criterios de información son los mejores estadísticos de decisión. Para comparar entre metodologías, se tuvo que calcular el RMSE y el U-Theil.

Tabla 7: Metodología Más Idónea para predecir *líneas móviles en servicio*

| Metodología Empleada | Estadísticos | |
|------------------------------|----------------|---------------|
| | RMSE | U-Theil |
| Box - Jenkins (ARIMA) | 107,403 | 0.0023 |
| Suavizamiento Exponencial | 195,855 | 0.0042 |
| Regresiones Polinomiales | 1,260,541 | 0.0270 |

Elaboración propia.

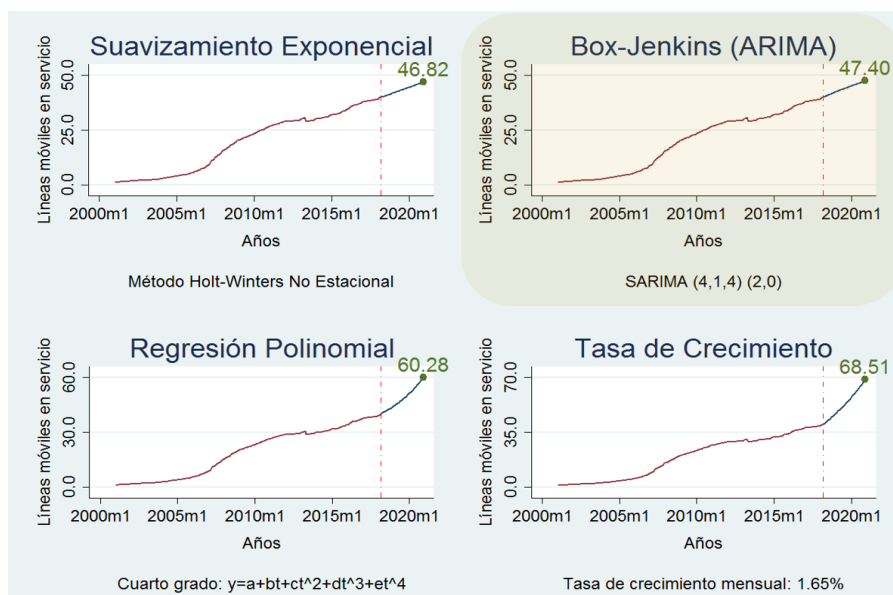
Adicionalmente, la Figura 12 muestra la evolución de la serie proyectada de líneas móviles en servicio, bajo las distintas metodologías.

Las metodologías menos precisas para predecir la serie bajo análisis son la de Regresiones Polinomiales y la de Tasa de Crecimiento Compuesta. Estas metodologías predicen un valor de 60.28 millones y 68.5 millones de líneas al cierre del año 2020, respectivamente. Estos resultados son consistentes con los altos valores de RMSE y U-Theil, los cuales se encuentran muy por encima de sus similares obtenidos para las metodologías de Box-Jenkins y Suavizamiento exponencial.

Por los resultados mostrados en la tabla anterior, la figura sombreada es la que describiría la mejor predicción de las líneas móviles en servicio al cierre 2020 (metodología de Box-Jenkins).

Por tanto, de acuerdo a los resultados obtenidos, se espera que -al cierre del año 2020- el número de líneas móviles en servicio alcance un total de 47.4 millones de líneas.

Figura 12: Comparación de Predicciones del número de *líneas móviles en servicio* bajo distintas metodologías (En Millones)



Elaboración propia.

No obstante, si bien esta metodología es la más idónea para predecir los valores futuros de la serie de líneas móviles en servicio, es necesario mencionar que la predicción podría aún ser mejorada si se considera una combinación de metodologías.

La idea detrás de esto es que, debe considerarse que cada metodología de predicción trata la serie histórica de manera distinta y, por ende, extrae diferente información del conjunto (o potencial) de información que brinda la serie histórica. Por tanto, puede suponerse que el uso de dos o más metodologías podría ofrecer mayor información.

En ese sentido, qué impulsaría a elegir una única metodología de predicción, cuando combinando más de una metodología podría obtenerse un mayor ajuste de los datos respecto a la serie histórica y, de esta forma, contar con predicciones más robustas. Esto se verá en la siguiente sección, en donde se aplicará -de ser posible- la combinación de metodologías de predicción para las series de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga.

6.3. Aplicación del Test de Diebold y Mariano

El Test de Diebold y Mariano permite probar si la combinación de dos o más metodologías de predicción es más idónea (predicción más robusta) que el uso de la mejor metodología de predicción de manera individual. Para considerar si es necesaria una combinación de metodologías de predicción, estas son tomadas dos a dos, para finalmente comprobar si una combinación de las tres metodologías es aún más eficiente.

Para cada una de las combinaciones de predicciones se realiza el test de Diebold y Mariano. En este caso, la prueba de hipótesis sería la siguiente:

$$H_0 : \alpha_{MCO} = 0 \dots \text{NO combinación de Metodologías}$$

$$H_1 : \alpha_{MCO} \neq 0 \dots \text{SÍ Combinación de Metodologías}$$

En esta sección se presentan los resultados del test para las series de los dos indicadores (número de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga).

Adicionalmente, como se especificó anteriormente, si a través del Test de Diebold y Mariano se recomienda una combinación de metodologías de predicción, es de esperar que en cualquier combinación de predicciones se le asocie una mayor ponderación a las metodologías más eficientes y una menor ponderación a las metodologías menos eficientes.

6.3.1. Respecto a la serie de líneas móviles en servicio

En la sección anterior se observó que la metodología de predicción más eficiente para la serie de número de líneas móviles en servicio (de manera individual) fue la de

Box-Jenkins (SARIMA (4,1,4) (2,0,0)₁₂), seguido por la de Suavizamiento Exponencial (Holt-Winters No Estacional); y, menos eficiente para este caso era la predicción a través del mejor modelo de Regresiones Polinomiales.

La Tabla 8 muestra un resumen de los principales estadísticos derivados de las regresiones MCO realizadas para estimar los ponderadores que se le asigna a cada metodología dentro de la combinación lineal de metodologías (α).

De este modo, la Tabla 8 muestra que los *p-value* asociados a los ponderadores de cualquiera de las predicciones combinadas se encuentran por debajo de 0.05 (ver cuarta columna de la tabla), por lo que se asume que estos son significativos (con lo que se rechazaría la hipótesis nula de que $\alpha_{MCO} = 0$). Por tanto, esto sugiere que debe realizarse una combinación de metodologías de predicción.

Tabla 8: Comparación de Combinaciones de Metodologías de Predicción del número de *líneas móviles en servicio*

| Predicciones combinadas | Coefficientes (ponderadores) | <i>t</i> | <i>p. value (t)</i> | <i>F</i> | <i>p. value (F)</i> |
|--|--------------------------------|----------|---------------------|-----------|---------------------|
| Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales | $\alpha_{ARIMA} = 0.983$ | 168.067 | 0.0000 | 28,246.63 | 0.0000 |
| Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales | $\alpha_{exponencial} = 0.962$ | 94.113 | 0.0000 | 8,857.17 | 0.0000 |

Elaboración propia.

La tabla anterior muestra que para el caso analizado sobre líneas móviles en servicio se tiene que:

- En una combinación de predicciones de *Box-Jenkins* y *Regresiones Polinomiales* se le otorgarían ponderaciones de 0.983 y 0.017, respectivamente.
- En una combinación de predicciones de *Suavizamiento Exponencial* y *Regresiones Polinomiales* se le otorgarían ponderaciones de 0.962 y 0.038, respectivamente.

Sobre las ponderaciones asignadas a cada una de las metodologías para este caso específico se deduce que:

- La metodología *Box-Jenkins* es superior estadísticamente a la de *Suavizamiento Exponencial*. Esto es consistente con los resultados obtenidos en las predicciones individuales.
- Pese a haber tratado a la metodología de *Regresiones Polinomiales* como una metodología ineficiente para predecir las líneas móviles en servicio de manera individual, la metodología le otorga una ponderación -por más pequeña que sea- para realizar una mejor predicción bajo la combinación de metodologías³⁴.

³⁴Nuevamente, esto se debe a que la información que extrae esta metodología de la serie histórica, no la extrae ninguna de las otras dos metodologías (denominadas eficientes).

Es necesario tener en cuenta que en la tabla mostrada no se incluye la combinación entre las metodologías de Box-Jenkins y Suavizamiento Exponencial ni la combinación entre las metodologías Box-Jenkins, Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales, por el simple hecho de que –al parecer– la información extraída por la metodología de Suavizamiento Exponencial –en este caso– estaría contenida en la información extraída por la metodología de Box-Jenkins, algo que difícilmente sucede³⁵.

6.3.2. Respecto a la serie de suscripciones de televisión de paga

Para la serie del número de suscripciones de televisión de paga analizada, la metodología de predicción individualmente más eficiente fue la de Box-Jenkins (SARIMA (4,1,4)(2,0,0)₁₂), seguida de la de Suavizamiento Exponencial (Holt Winters No Estacional), mientras que la metodología menos eficiente fue nuevamente la de Regresiones Polinomiales.

Sin embargo, la tabla siguiente muestra que todas las combinaciones de metodologías son posibles de ser efectuadas, todas cuentan con *p-value* asociados menores a 0.05. Esto es, se rechazaría la hipótesis nula del Test de Diebold y Mariano, con lo que se sugiere emplear una combinación de metodologías de predicción.

Tabla 9: Comparación de Combinaciones de Metodologías de Predicción del número de *suscripciones de televisión de paga*

| Predicciones combinadas | Coefficientes (ponderadores) | <i>t</i> | <i>p. value (t)</i> | <i>F</i> | <i>p. value (F)</i> |
|---|--------------------------------|----------|---------------------|----------|---------------------|
| <i>Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial</i> | $\alpha_{ARIMA} = 0.796$ | 3.933 | 0.0001 | 15.47 | 0.0001 |
| <i>Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales</i> | $\alpha_{exponencial} = 0.913$ | 31.043 | 0.0000 | 963.65 | 0.0000 |
| <i>Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales</i> | $\alpha_{exponencial} = 0.905$ | 29.962 | 0.0000 | 897.70 | 0.0000 |
| <i>Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales</i> | $\alpha_{ARIMA} = 0.743$ | 3.735 | 0.0003 | 481.47 | 0.0000 |
| | $\alpha_{exponencial} = 0.172$ | 0.864 | 0.3887 | | |

Elaboración propia.

Nuevamente, de la tabla anterior se demuestra que a las metodologías más eficientes se les asocia mayores ponderadores (a partir de la regresión de MCO) dentro de la combinación de metodologías. A saber:

- En una combinación de predicciones de *Box-Jenkins* y *Suavizamiento Exponencial* se le otorgarían ponderaciones de 0.796 y 0.204, respectivamente.
- En una combinación de predicciones de *Box-Jenkins* y *Regresiones Polinomiales* se le otorgarían ponderaciones de 0.913 y 0.087, respectivamente.
- En una combinación de predicciones de *Suavizamiento Exponencial* y *Regresiones Polinomiales* se le otorgarían ponderaciones de 0.905 y 0.095, respectivamente.

³⁵ Difícilmente sucede porque por lo general cada metodología brinda algo de información distinta.

-
- En una combinación de predicciones de *Box-Jenkins*, *Suavizamiento Exponencial* y *Regresiones Polinomiales* se le otorgarían ponderaciones de 0.743, 0.172 y 0.085, respectivamente.

Luego, una vez conocido que las series analizadas (líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga) tendrían predicciones más eficientes con la combinación de metodologías de predicción más que del uso de metodologías individuales, la siguiente sección muestra cuáles son las mejores combinaciones para cada una de las series.

7. Combinación de metodologías de predicción

De acuerdo a la literatura, Diebold y Lopez (1996), Newbold y Harvey (2002) sostienen que a menudo se ha encontrado que la combinación de predicciones individuales del mismo evento supera a las predicciones individuales, en el sentido de que la predicción combinada arroja un error de pronóstico medio cuadrático más pequeño.

Por su parte, Clemen (1989) señala que, de acuerdo a la evidencia empírica, la combinación de predicciones múltiples lleva a una mayor precisión de la predicción. Así, en muchos casos, uno puede hacer mejoras dramáticas en el rendimiento simplemente promediando las predicciones.

Los resultados que se mostrarán en las secciones 7.1. y 7.2. son consistentes con lo señalado por Granger (1969):

“si el objetivo es hacer una buena predicción, no es buen procedimiento descartar predicciones, ya que casi siempre contiene información útil e independiente”³⁶.

7.1. Para la serie de líneas móviles en servicio

Como se mencionó en la sección 6, para el caso de las líneas móviles en servicio, la información extraída por la metodología de *Box-Jenkins* ya estaría contenida en la información extraída por la metodología de *Suavizamiento Exponencial*. Por tanto, las únicas combinaciones de metodologías que tendrían sentido ser efectuadas son las que se muestran en la Tabla 10.

A saber, entre las dos combinaciones de metodologías posibles, la combinación de las metodologías de *Box-Jenkins* con *Regresiones Polinomiales* sería la más eficiente para predecir el número de líneas móviles en servicio. En efecto, esta combinación de metodologías presenta la menor RMSE (105,303) y la menor U-Theil (0.00225).

³⁶ Asimismo, menciona que esta información independiente puede ser de dos tipos: (i) una predicción se basa en variables o información que la otra predicción no ha considerado, (ii) cada metodología de predicción hace una suposición diferente sobre la forma de la relación entre las variables.

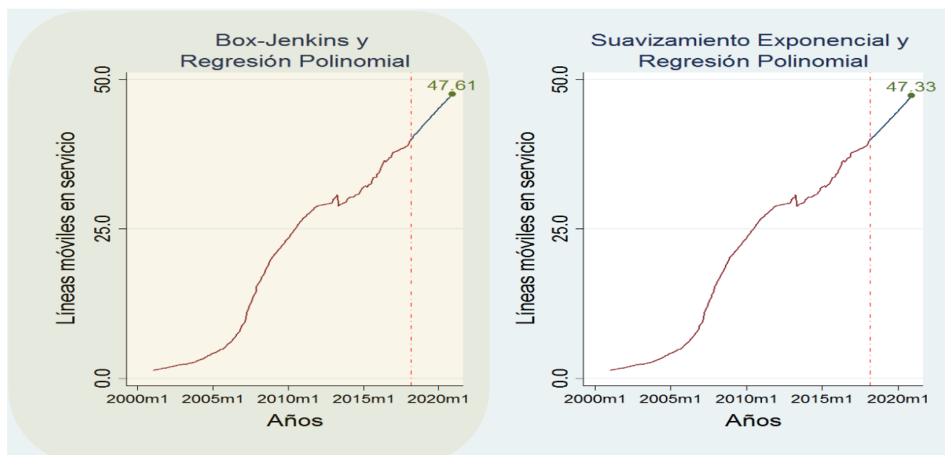
Tabla 10: Combinación Más Idónea para predecir la serie de número de *líneas móviles en servicio*

| Predicciones combinadas | Indicadores | |
|--|------------------|----------------|
| | <i>RMSE</i> | <i>U-Theil</i> |
| Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales | 105,303.2 | 0.00225 |
| Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales | 189,591.1 | 0.00407 |

Elaboración propia.

Finalmente, la figura a continuación muestra la evolución de la serie de líneas móviles en servicio al cierre del año 2020, bajo ambas combinaciones de metodologías de predicción. En particular, sobre la base de los estadísticos de decisión, la figura sombreada muestra que la combinación de las metodologías de predicción (Box-Jenkins y Regresiones Polinomiales) arroja resultados más precisos que cualquier otra predicción individual. Así, para el cierre del año 2020, se estaría alcanzando un total de 47.6 millones de líneas móviles en servicio.

Figura 13: Evolución de las líneas móviles en servicio por distintas combinaciones de metodologías (según Diebold-Mariano) (En Millones de líneas)



Elaboración propia.

7.2. Para la serie de suscripciones de televisión de paga

Como se mencionó en el capítulo 6, todas las combinaciones de metodologías de predicción son posibles. Sin embargo, queda aún por observar cuál de las combinaciones es más eficiente para predecir el número de suscripciones de televisión de paga.

Sobre la base de los resultados obtenidos, una vez ya realizadas las distintas combinaciones de metodologías de predicción, se calculan los estadísticos de decisión (RMSE y U-Theil) con el objetivo de observar cuál de las combinaciones es más idónea para la serie de suscripciones de televisión de paga. De este modo, según la

siguiente tabla, entre todas las combinaciones de predicción (tomadas dos a dos y una en la que se combinen tres metodologías), la más precisa es la que corresponde a la combinación de las tres metodologías (Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial + Regresión Polinomial). La combinación de las tres metodologías de predicción arroja la menor RMSE (13,319) y la menor U-Theil (0.005).

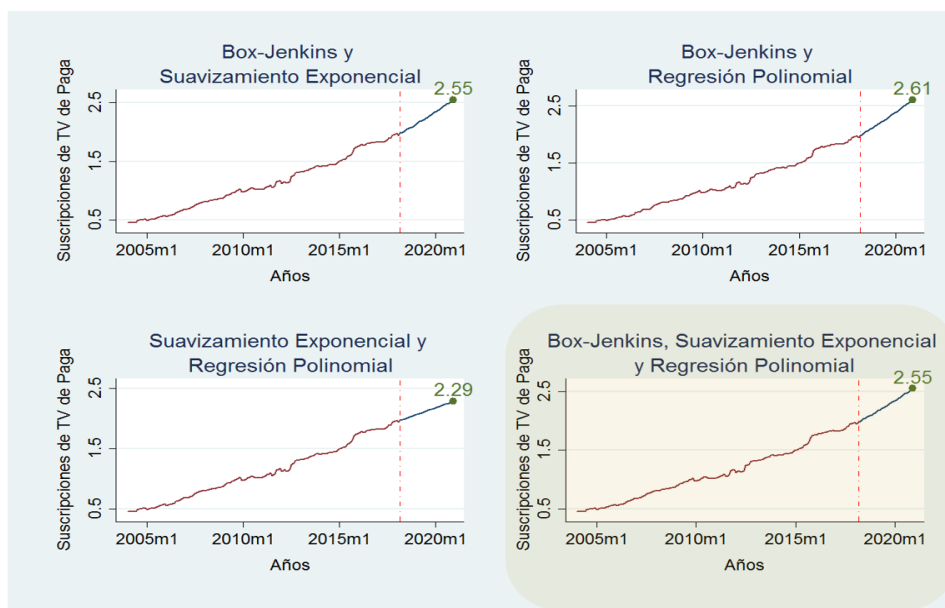
Tabla 11: Combinación Más Idónea para predecir la serie de cantidad de *suscripciones de televisión de paga*

| Predicciones combinadas | Indicadores | |
|---|-----------------|----------------|
| | <i>RMSE</i> | <i>U-Theil</i> |
| Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales | 13,319.3 | 0.00547 |
| Suavizamiento Exponencial + Regresiones Polinomiales | 13,875.9 | 0.00572 |
| Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial | 13,642.7 | 0.00560 |
| Box-Jenkins + Regresiones Polinomiales | 13,364.9 | 0.00549 |

Elaboración propia.

Finalmente, la combinación de metodologías más eficiente muestra que para el cierre del año 2020, se estaría alcanzando un total de 2.55 millones de suscripciones de televisión de paga. (Ver figura a continuación).

Figura 14: Evolución de suscripciones de televisión de paga por distintas combinaciones de metodologías (según Diebold-Mariano) (En Millones de suscripciones)



Elaboración propia.

8. Conclusiones y recomendaciones

El sector de las telecomunicaciones se caracteriza por ser muy dinámico, tanto por la intensidad competitiva que ejercen las empresas operadoras como por la aparición de nuevas tecnologías sobre las que se brindan los servicios. En ese sentido, es frecuente que -para algunos servicios- se necesite realizar predicciones sobre indicadores relevantes, a fin de anticipar su tendencia y sus valores futuros.

Es por dicha necesidad que, el presente documento pretende ser una referencia al momento de realizar predicciones sobre la evolución de indicadores univariados. Para ello, se presentó el tratamiento previo que debe ejecutarse sobre la serie histórica, con el propósito de realizar predicciones en base a distintas metodologías (*Suavizamiento Exponencial, Box-Jenkins, Regresiones Polinomiales y Crecimiento Promedio Compuesto*).

De este modo, en base a las series históricas del número de líneas móviles en servicio y el número de suscripciones de televisión de paga, se seleccionó la mejor versión (o modelo) de cada metodología -de manera individual- para predecir la evolución de cada serie hasta el cierre del año 2020. De acuerdo a estadísticos de decisión (RMSE y U-Theil), se observó que:

- En el caso del número de líneas móviles en servicio, la mejor metodología para predecir dicha serie fue la de Box-Jenkins, seguido de Suavizamiento Exponencial y, muy lejanamente la metodología de Regresiones Polinomiales.
- En el caso del número de suscripciones de televisión de paga, la mejor metodología de predicción también fue la de Box-Jenkins, seguido de Suavizamiento Exponencial.

No obstante, lo novedoso de este documento es que se pueden obtener predicciones mucho más precisas si se considera no solo la mejor opción (de una metodología individual), sino una combinación de las mejores versiones bajo diferentes metodologías. Tal como se especificó en el documento, la literatura econométrica señala claramente que la combinación de metodologías arroja mejores predicciones que las obtenidas a través de metodologías individuales.

A pesar de que el presente documento (así como la literatura econométrica reciente) considera que la combinación de metodologías de predicción resulta de gran importancia, se debe de tener en cuenta lo siguiente:

- Si la información extraída de la serie por parte de una metodología de predicción está contenida dentro de la información extraída por otra metodología, la combinación de estas metodologías sería trivial, y el análisis realizado llevaría a utilizar aquella metodología que extraiga la mayor cantidad de información de la serie histórica, en combinación con otras metodologías³⁷. Sin embargo,

³⁷Aunque raramente sucede de que la información extraída por una metodología de predicción

basta que otra metodología considere información adicional, para que la combinación sea posible. Esto es, lo que sucedió en el caso de la predicción del número de líneas móviles en servicio.

- Si bien una metodología de predicción podría no ser muy precisa para pronosticar los valores futuros de algún indicador (como sucedió con Regresiones Polinomiales en las predicciones del número de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga), esta no debería de ser descartada porque es muy probable que extraiga información que el resto de metodologías no haya extraído y, por tanto contribuir con la predicción.

Las siguientes tablas sobre predicciones del número de líneas móviles en servicio y suscripciones de televisión de paga muestran que la combinación de metodologías es una mejor opción que el resto de metodologías de manera individual (menores valores de RMSE y U-Theil). Así, se espera que al cierre del año 2020 se cuente con:

- **47.61 millones de líneas móviles en servicio**, cifra cercana a la de Box-Jenkins individual. Esto es consistente porque no se considera a la metodología de Suavizamiento Exponencial (al parecer extrae la misma información que la de Box-Jenkins) y al hecho de que las metodologías con predicciones más eficientes se les asigna mayores ponderadores al momento de realizar la combinación de metodologías.
- **2.55 millones de suscripciones de televisión de paga**. Para esta serie histórica resultó que la combinación de las tres metodologías (Box-Jenkins, Suavizamiento Exponencial y Regresiones Polinomiales) es más precisa que cualquier predicción obtenida por metodologías individuales, e incluso por cualquier otra combinación de metodologías de predicción.

Tabla 12: Combinación Más Idónea para predecir las series históricas

Número de Líneas Móviles en Servicio

| ¿Individual o combinada? | Metodología | Versión | Estadísticos | | Pronósticos (millones) |
|--------------------------|------------------------------------|---|--------------|---------|------------------------|
| | | | RMSE | U-Theil | |
| Combinada | Box-Jenkins + Regresión Polinomial | SARIMA (4,1,4)(2,0,0) ₁₂ Cuarto Grado | 105,303 | 0.0023 | 47.61 |
| Individual | Regresiones Polinomiales | Cuarto Grado | 1,260,541 | 0.0270 | 60.28 |
| | Suavizamiento Exponencial | Holt-Winters No estacional | 195,855 | 0.0042 | 46.82 |
| | Box-Jenkins (ARIMA) | SARIMA (4,1,4)(2,0,0) ₁₂ | 107,403 | 0.0023 | 47.40 |

Número de Suscripciones de Televisión de Paga

| ¿Individual o combinada? | Metodología | Versión | Estadísticos | | Pronósticos (millones) |
|--------------------------|--|---|--------------|---------|------------------------|
| | | | RMSE | U-Theil | |
| Combinada | Box-Jenkins + Suavizamiento Exponencial + Regresión Polinomial | SARIMA (4,1,4)(2,0,0) ₁₂ Holt-Winters No Estacional Cuarto Grado | 13,319 | 0.0055 | 2.55 |
| Individual | Regresiones Polinomiales | Cuarto Grado | 34,722 | 0.0143 | 2.45 |
| | Suavizamiento Exponencial | Holt-Winters No estacional | 14,277 | 0.0059 | 2.27 |
| | Box-Jenkins (ARIMA) | SARIMA (4,1,4)(2,0,0) ₁₂ | 13,702 | 0.0056 | 2.62 |

Elaboración propia.

–para una serie determinada– se encuentre incluida dentro de la información extraída por otra metodología.

Por tanto, se recomienda que:

- 1) En base a los casos aplicados en el presente documento y a los avances en las técnicas de predicción, se debe evaluar no solo la metodología más idónea para una determinada serie, sino las distintas combinaciones en las metodologías de predicción. Es muy probable que estas últimas arrojen resultados más precisos.

Lo mencionado en el párrafo precedente ya no es un proceso complicado, pues varios de los programas informáticos -como *Risk Simulator* y *EViews*- incluyen como herramienta una versión automática para encontrar las mejores predicciones para cada metodología. No obstante, lo que aún no se incluye de manera automática es la opción de comparar si una combinación de metodologías arroja resultados más precisos que la mejor opción individual. Aunque, esto último puede realizarse según lo explicado en el documento.

- 2) No existe una metodología de predicción superior a otra. La aplicación de una u otra metodología depende de la cantidad de datos con los que cuente la serie y de la forma de su evolución.

Así, cuando se cuente con pocos datos históricos, no es posible esperar predicciones precisas empleando la metodología de Box-Jenkins, pero sí empleando Suavizamiento Exponencial³⁸. Luego, respecto a la forma de la evolución de la serie, se recomienda siempre recurrir al paquete informático, a fin de evaluar todos los casos posibles.

- 3) Aunque la mejor versión dentro de una metodología arroje un valor alto de RMSE y U-Theil (en comparación a otras metodologías), es muy probable que en la combinación de metodologías esta no sea descartada porque recoge información que el resto de metodologías no capturó. Por lo que resulta necesario realizar predicciones bajo todas las combinaciones de metodologías posibles. Esto pudo verse en la predicción de líneas móviles en servicio mediante Regresiones Polinomiales.
- 4) A pesar de que en otras investigaciones como Granger y Newbold (1975), Makridakis y Hibon (1978) Winkler y Makridakis (1983) sugieren que las metodologías deben ser ponderadas a través de un promedio simple debido a la complejidad de encontrar los ponderadores, el caso práctico realizado en este documento -a través del empleo de software- demuestra que la importancia que tiene cada metodología particular depende del ajuste que esta tenga sobre los datos históricos analizados.

³⁸Incluso, el mismo paquete informático arroja una advertencia de que se requiere de más datos con Box-Jenkins, lo cual no sucede con otras metodologías como Suavizamiento Exponencial.

Bibliografia

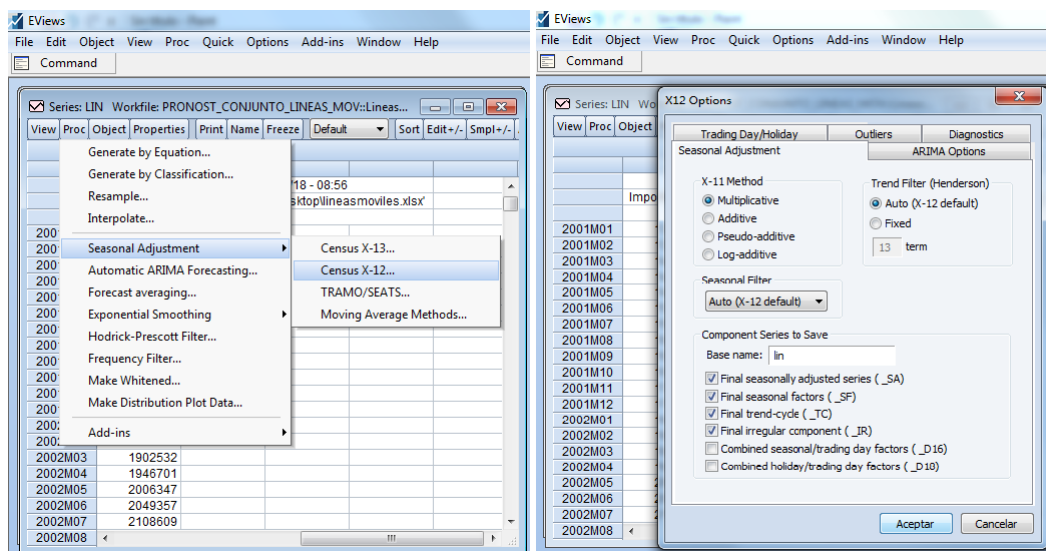
- [1] ANDERSEN, A. & WEISS, A. (1984). *“Forecasting: The Box-Jenkins Approach”*. England.
- [2] ARMSTRONG, J. (1978). *“Forecasting with Econometric Methods: Folklore versus Fact with Discussion”*. Journal of Business, 51, 549-600 Disponible en: goo.gl/v6HzVE
- [3] BATES J. & GRANGER C. (1969). *“The Combination of Forecast”*. Disponible en: goo.gl/BJtXCL
- [4] BILLAH, B., KING, M., SNYDER, R. & KOEHLER, A. (2006). *“Exponential smoothing model selection for forecasting”*. International Journal of Forecasting.
- [5] BOX, G. & JENKINS, G. (1970). *“Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco”*. San Francisco.
- [6] BOX, G. & PIERCE, D. (1973). *“Distribution of the Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving-Average Time Series Models”*. Journal of the American Statistical Association, 65, 1509-1526.
- [7] BROWN, R. (1959). *“Statistical Forecasting for Inventory Control”*. McGraw-Hill.
- [8] BROWN, R. (1963). *“Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series”*. Prentice-Hall.
- [9] CHATFIELD, C. (1989). *“The Analysis of Time Series: An Introduction”*. Chapman and Hall, London, 4th edition.
- [10] COGGER, K. (1974). *“The Optimality of General-Order Exponential Smoothing”*. Operations Research, 22, 858-867.
- [11] COHEN, G. (1963). *“A note on exponential smoothing and autocorrelated inputs”*. Operations Research, 2, 361-367.
- [12] CZAJKOWSKI, M. & SOBOLEWSKI, M. (2016). *“Estimating call externalities in mobile telephony”*. Disponible en: goo.gl/CLWjZr
- [13] DEPARTMENT OF JUSTICE (2015). *“Herfindahl-Hirschman Index”*. Disponible en: <https://www.justice.gov/atr/herfindahl-hirschman-index>
- [14] DIEBOLD, F. & MARIANO, R. (1995). *“Comparing predictive accuracy”*. Journal of Business & Economic Statistics, Vol.13, núm. 3.
- [15] ENDERS, W. (2010). *“Applied Econometric Time Series”*. 3rd ed. Hoboken, NJ: Jhon Willey.
- [16] GREENE, W. (2002). *“Econometric Analysis”*. 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

-
- [17] HENDRY, D. & CLEMENTS, M. (2001). “*Pooling of Forecast*”. *Econometrics Journal*, Vol. 7, pp. 1-31.
- [18] HAMILTON, J. (1994). “*Time Series Analysis*”. Princeton University Press, Princeton.
- [19] HARVEY, ANDREW C. (1993). “*Time series models*”. Cambridge, MA, The MIT Press, 1993.
- [20] LIESE, F. & MIESCKE, K. (2008). “*Statistical decision theory: Estimation, testing, and selection*”. Springer.
- [21] LOAYZA, R., & JAUREGUI, S. (2015). “*Evolución del Mercado de Telecomunicaciones Móviles en el Perú*”. Disponible en goo.gl/8E6FZV
- [22] JÍMENEZ, J. (2006). “*La capacidad predictiva en los métodos Box-Jenkins y Holt-Winters: una aplicación al sector turístico*”. Universidad de Almería.
- [23] MADSEN, H. (1955). “*Time Series Analysis*”.
- [24] MAKRIDAKIS, S., & HIBON, M. (1979). “*Accuracy of Forecasting: An Empirical Investigation*”, (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 142, Pte. 2, pp. 79-145”.
- [25] MAKRIDAKIS, S., et al. (1982). “*The Accuracy of Extrapolative (Time Series) Methods: Results of a Forecasting Competition*”. *Journal of Forecasting*, Vol. 1, núm. 2, pp. 111-153.
- [26] MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S., & MCGEE, V. (1983). “*Forecasting Methods and Applications (2nd Edition)*”. Wiley and Sons, New York.
- [27] MAKRIDAKIS, S., et al. (1993). “*The M2-Competition: A Real-Time Judgmentally-Based Forecasting Study*”. *International Journal of Forecasting*, Vol. 9, núm. 1, pp. 5-23.
- [28] MARQUART, D. (1963). “*An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters*”. *Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 431-441.
- [29] MÁRQUEZ, L., HILL, T., WORTHLEY, R. & REMUS, W.(1991). “*Neural network models as an alternative to regression*”. *Proceedings of the 24th Annual Hawaii International Conference on System Sciences*, 4, 129-135.
- [30] MARTÍN DEL BRÍO, B. & SANZ, A. (2006). “*Redes neuronales y sistemas difusos*”.
- [31] MCWHORTER, A. (1975). “*Time Series Forecasting Using the Kalman Filter: An Empirical Study*”. *Proc. Amer. Statist. Ass., Business and Economics Section*, pp. 436-446.

-
- [32] NELSON, C. & PLOSSER, C. (1982). “*Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series*”. Journal of Monetary Economics 10 (1982) 139-162. North-Holland Publishing Company.
- [33] NEWTON, H. & PARZEN, E. (1984). “*Forecasting and Time Series Model Types of 111 Economic Time Serie*”. Disponible en: goo.gl/RWYVi3
- [34] PARZEN, E. (1982). “*ARARMA Models for Time Series Analysis and Forecasting*”, 1, pp. 67-82.
- [35] SANTEMASES, M. (2005). “*Dyane. Versión 3: Diseño y análisis de encuestas en investigación social y de mercados*”. Ediciones Pirámide.
- [36] SUJARITTANONTA, P. (2017). “*Evaluating mobile number portability policy in the Thai mobile telecommunications market*”. Disponible en: goo.gl/kJNKPd
- [37] SHUCHUM, W. (2006). “*Exponential Smoothing for Forecasting and Bayesian Validation of Computer Models*”. Georgia Institute Technology.
- [38] TIMMERMANN, A. (2005). “*Forecast Combinations*”. University of California San Diego.
- [39] WARNER, R. (1998). “*Spectral analysis of time-series data*”.
- [40] WHITE, H. (2014). “*Economic Prediction Using Neural Networks: The Case of IBM Daily Stock Returns*”.
- [41] WILSON, P.; OKUNEV, J.; ELLIS, C. & HIGGINS, D. (2000). “*Comparing Univariate Forecasting Techniques in Property Markets*”. Journal of Real Estate Portfolio Management, Vol. 6, núm. 3, pp. 283-306.
- [42] WITT, S. & WITT, C. (1995). “*Forecasting Tourism Demand: A Review Empirical Research*”. International Journal of Forecasting, Vol. 20, núm. 1, pp. 447-475.
- [43] ZIVOT, E. & ANDREWS, D. (1992). “*Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis*”. Journal of Business & Economic Statistic, Vol. 10, núm. 3, pp. 251-270.

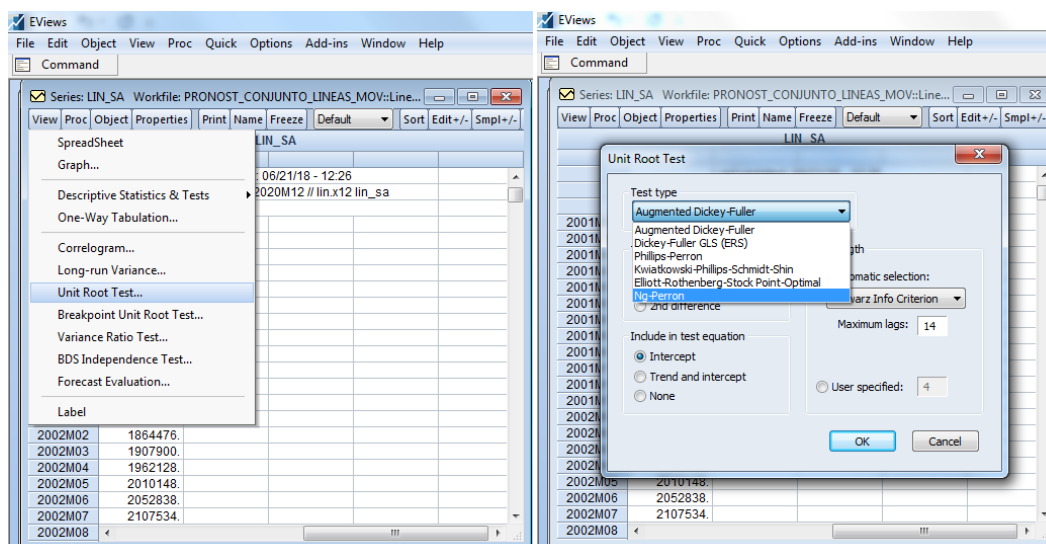
Anexos

Anexo 1. Secuencia de desestacionalización de una serie temporal (EViews)



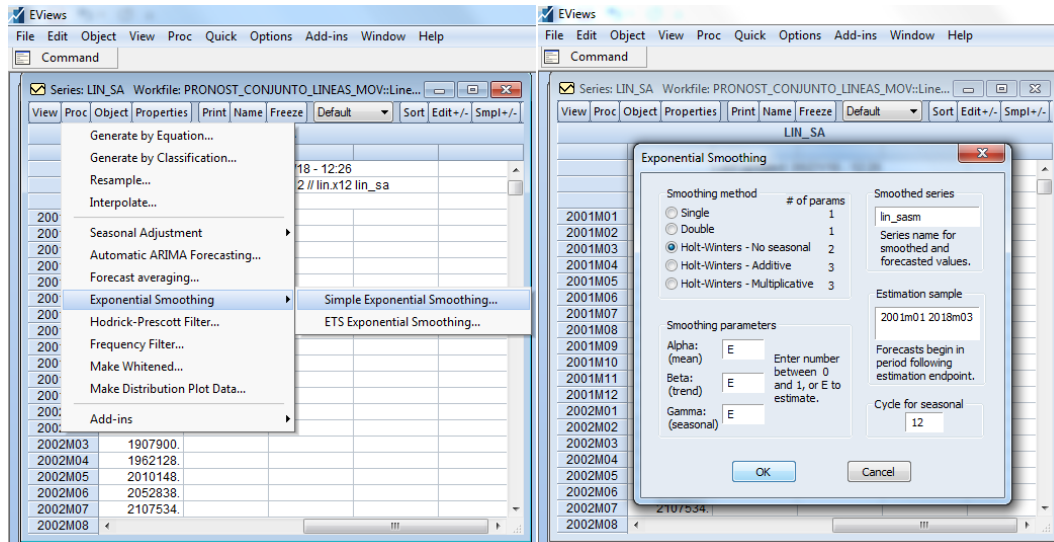
Elaboración propia.

Anexo 2. Secuencia de detección de Estacionariedad de una serie temporal (EViews)



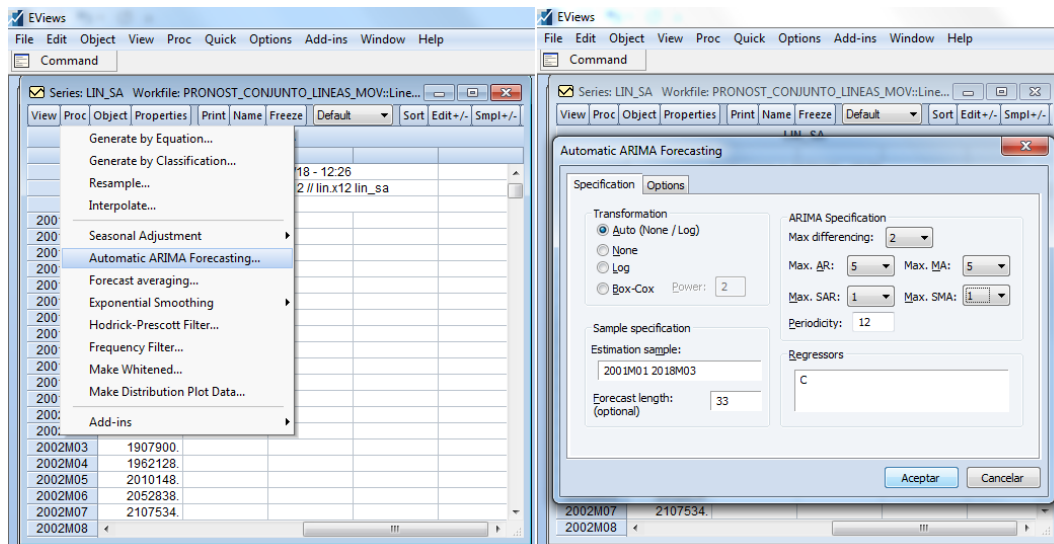
Elaboración propia.

Anexo 3. Secuencia para realización de predicción por Suavizamiento Exponencial (EViews)



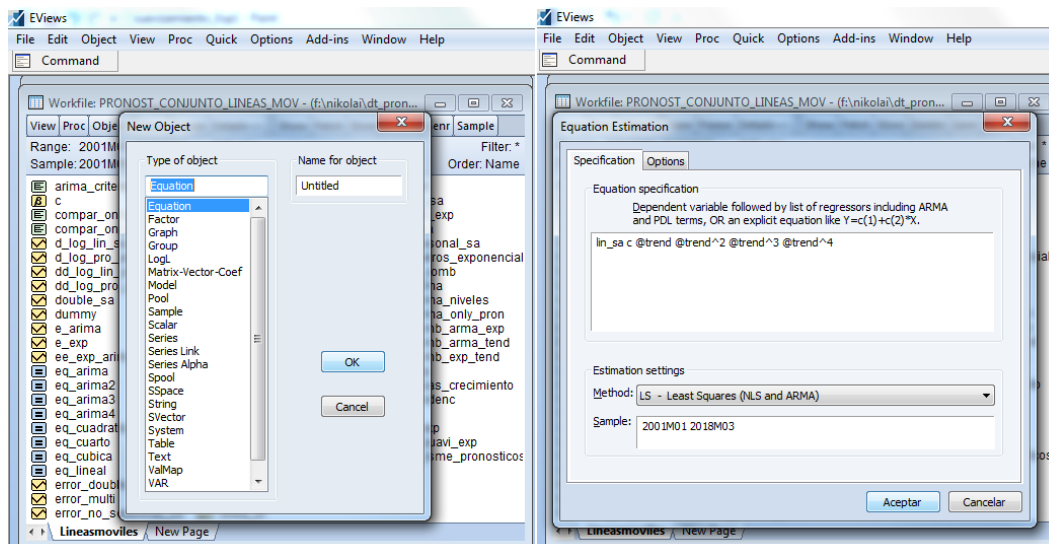
Elaboración propia.

Anexo 4. Secuencia para realización de predicción por Box-Jenkins (EViews)



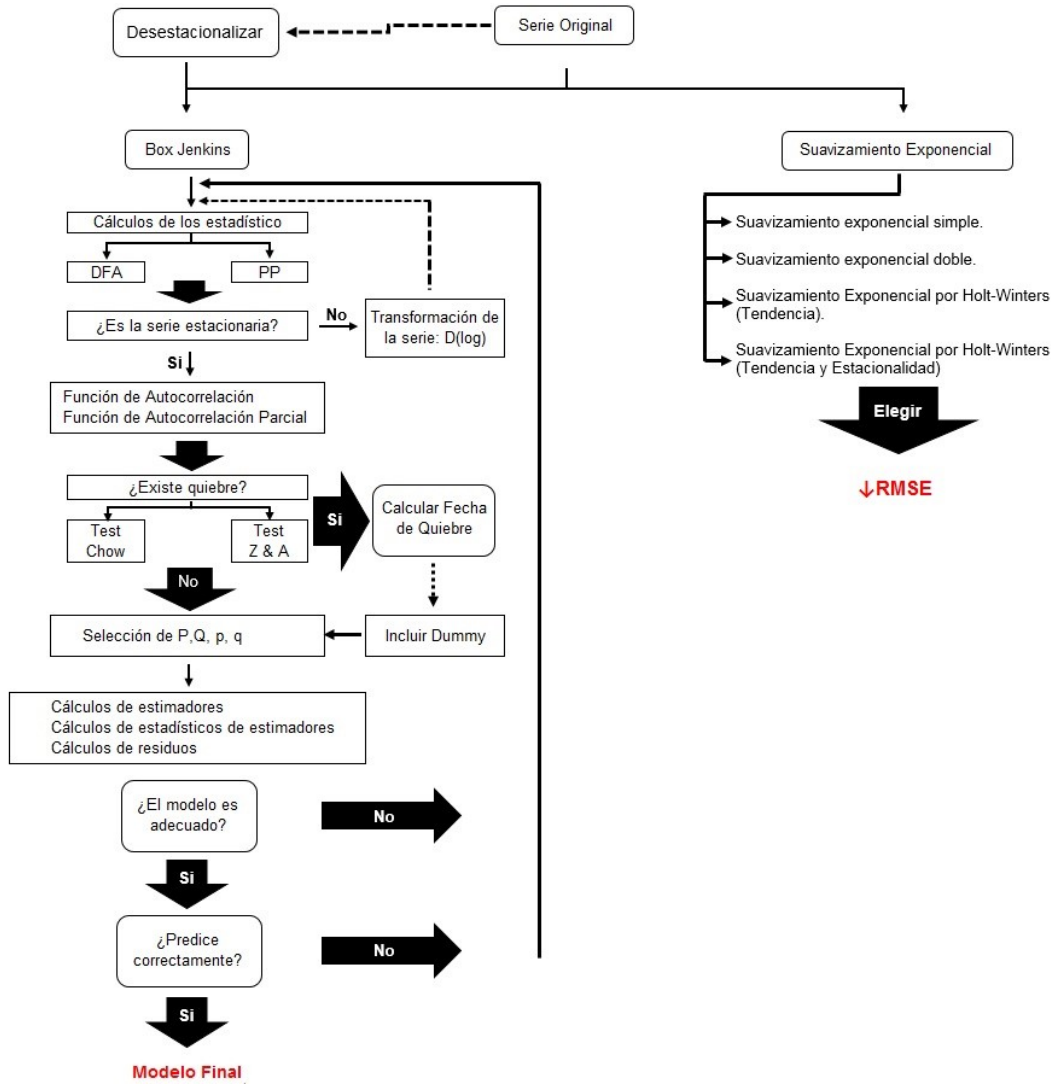
Elaboración propia.

Anexo 5. Secuencia para realización de predicción por Regresiones Polinomiales (EViews)



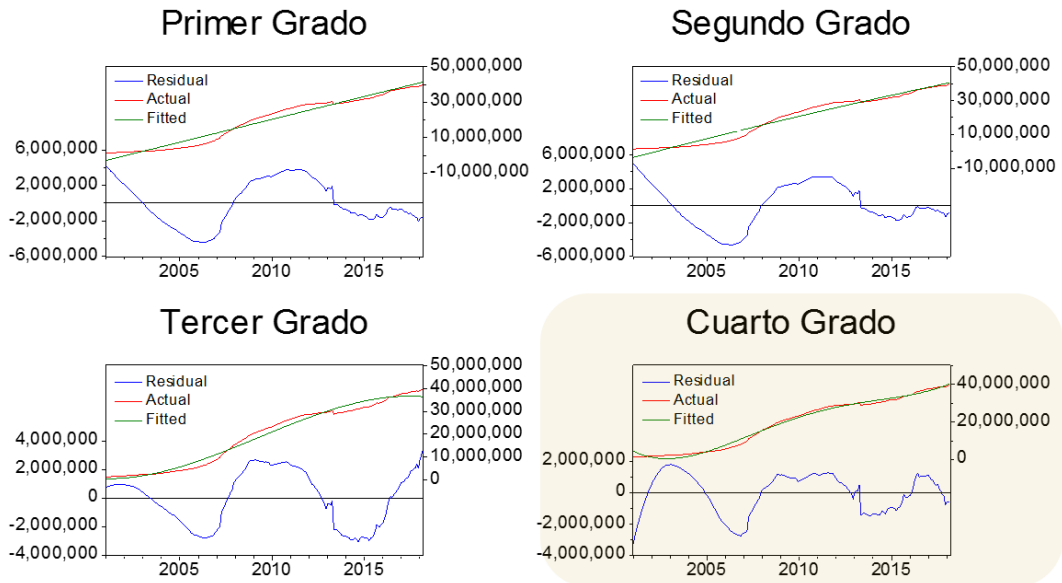
Elaboración propia.

Anexo 6. Secuencia de análisis para la implementación de la metodología de Box-Jenkins



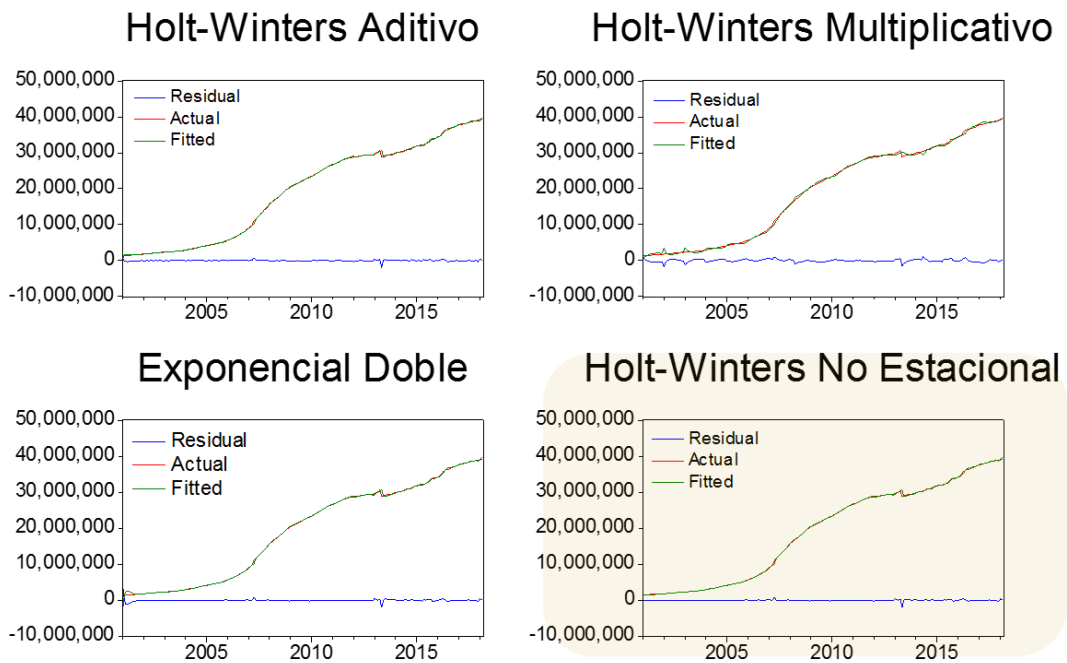
Elaboración propia.

Anexo 7. Análisis de los residuos bajo la metodología de Regresiones Polinomiales



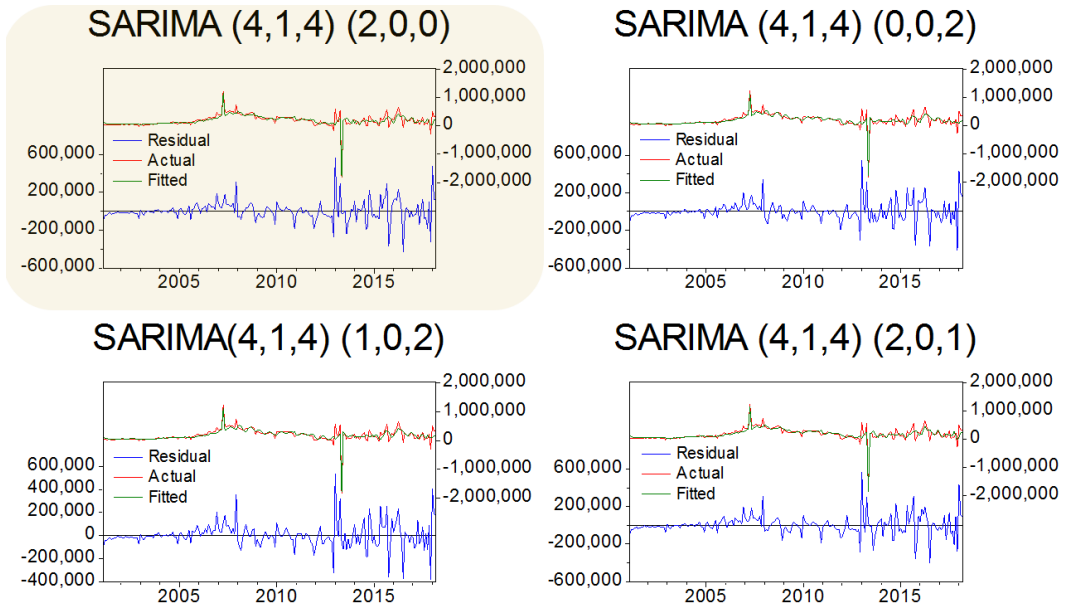
Elaboración propia.

Anexo 8. Análisis de los residuos bajo la metodología de Suavizamiento Exponencial



Elaboración propia.

Anexo 9. Análisis de los residuos bajo la metodología de Box-Jenkins (procesos *ARIMA*³⁹)



Elaboración propia.

³⁹ $s = 12$, dado que los datos empleados presentan periodicidad mensual.